UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Il teorema di Kac

TESI DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

CANDIDATO
Bernardo Tarini

RELATORE
Prof. **Andrea Maffei**
Università di Pisa

Anno accademico 2021-2022

Vorrei dedicare questa tesi a mia madre, mio fratello e mia nonna, che mi hanno sempre sostenuto nel mio percorso e mi sono sempre stati vicino. Questo piccolo traguardo l'ho raggiunto anche grazie a voi.

Un grazie di cuore al mio relatore Andrea Maffei, per aver messo a mia disposizione il suo tempo, la sua esperienza, e la sua grande competenza. Ha avuto una pazienza e una disponibilità fuori dal comune.

Vorrei ringraziare anche Eduardo Venturini, per il suo prezioso aiuto di carattere informatico.

Indice

Introduzione **v**

I Prerequisiti **1**

1 Prerequisiti **2**

1.1 Tori algebrici 2

II Quiver **7**

2 Rappresentazioni di quiver **8**

2.1 Rappresentazioni di quiver 8

2.2 Forma di Eulero 11

2.3 Spazio delle rappresentazioni 14

2.4 Sistemi di radici e gruppo di Weyl 15

2.5 Funtori di riflessione 17

3 Il teorema di Kac **22**

3.1 Supporto nella camera fondamentale 22

3.2 Teorema di Kac su campi finiti 25

3.3 Teoremi di non esistenza su $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ 28

3.4 Il caso $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}_p$ 31

3.5 Teoremi di esistenza su $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ 36

III Algebre di Kac-Moody **39**

4 Algebre di Lie graduate **40**

4.1 Algebre locali 40

4.2 Algebra inviluppante universale 43

4.3 Forme invarianti e transitività 50

5 Algebre di Kac-Moody **54**
5.1 Matrici di Cartan 54
5.2 Sistemi di radici 57
5.3 Camera fondamentale 63
5.4 Considerazioni finali 67

Bibliografia **69**

Introduzione

Un quiver (S, O) è un grafo finito S dove sono ammessi loop e più archi tra due stessi vertici, munito di un'orientazione O sugli archi. Chiamiamo I l'insieme dei vertici e Ω l'insieme (finito) degli archi. Dare una rappresentazione di S su campo $\mathbb{F}$ (che indicheremo compattamente con (V, ϕ)) significa far corrispondere a ciascun vertice $i \in I$ un $\mathbb{F}$-spazio vettoriale (finito) V_i, e a ciascun arco orientato $h \in \Omega$ un'applicazione lineare ϕ_h. Possiamo vedere le rappresentazioni su $\mathbb{F}$ di (S, O) come oggetti di una categoria $\mathrm{Rep}(S, O, \mathbb{F})$, dove un morfismo $f : (V, \phi) \to (U, \psi)$ tra due rappresentazioni è ragionevolmente una collezione di applicazioni $(f_i : V_i \to U_i)_{i \in I}$ che rispettino le relazioni di commutatività $f_j \circ \phi_h = \psi_h \circ f_i$ per ogni $i, j \in I,\ h \in \Omega$ con $h : i \to j$.

Scelte delle applicazioni lineari apparentemente molto diverse, potrebbero in realtà star descrivendo la stessa rappresentazione, a meno di isomorfismo. Sorge quindi spontanea la domanda: "È possibile ottenere qualche informazione sulle classi di isomorfismo in $\mathrm{Rep}(S, O, \mathbb{F})$?"

Sarà ragionevole focalizzarci sulle rappresentazioni indecomponibili, cioè quelle non esprimibili come somma diretta non banale di rappresentazioni (e che non siano banali esse stesse). Una qualsiasi rappresentazione di dimensione finita può infatti essere decomposta in finite rappresentazioni indecomponibili (l'insieme degli indecomponibili, contati con molteplicità, non dipende peraltro dalla decomposizione scelta, per il teorema di Krull-Schmidt). Il motto alla base della trattazione che faremo sarà quindi: "Capire le indecomponibili significa capire tutto". Una rappresentazione di (S, O) su $\mathbb{F}$ è detta *assolutamente indecomponibile* se rimane indecomponibile anche in $\overline{\mathbb{F}}$.

Detto Γ il reticolo $\mathbb{Z}^I$ con base canonica $(\boldsymbol{\varepsilon}_i)_{i \in I}$, e $\Gamma_+ = \{\alpha \in \Gamma \setminus \{0\};\ \alpha_i \geq 0\ \ \forall\, i \in I\}$, chiamiamo dimensione di una rappresentazione V il vettore $\dim V = \sum k_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \in \Gamma_+$ dove $k_i = \dim V_i$. Con $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$ indicheremo lo spazio vettoriale delle rappresentazioni U di dimensione α, dove $U_i = \mathbb{F}^{\alpha_i}\ \ \forall\, i \in I$. A meno di fissare delle basi, ogni oggetto di $\mathrm{Rep}(S, O, \mathbb{F})$ di dimensione α può essere descritto da un elemento in $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$. Inoltre, due rappresentazioni in questo spazio sono isomorfe se e solo se sono coniugate tramite l'azione algebrica degli $\mathbb{F}$-punti di

$$\mathrm{GL}(\alpha) := \bigoplus_{i \in I} \mathrm{GL}(\alpha_i, \overline{\mathbb{F}}),$$

descritta da

$$(g_i)_{i\in I}\cdot(\phi_h)_{h\in\Omega}=(g_j\circ\phi_h\circ g_i^{-1};\ h:i\to j)_{h\in\Omega}.$$

Il risultato principale che presenteremo in questa tesi sarà una caratterizzazione esplicita di tutti i possibili vettori dimensionali di rappresentazioni indecomponibili. Prima di enunciarlo dobbiamo introdurre due ingredienti fondamentali: il *gruppo di Weyl* e il *sistema di radici* associati a S.

Definiamo una forma bilineare $\langle\ ,\ \rangle$ su Γ, con

$$\langle\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j\rangle=\delta_{ij}-\#\{h\in\Omega\ h:\ i\to j\}.$$

Sia $(a,b)=\frac{1}{2}(\langle a,b\rangle+\langle b,a\rangle)$ la corrispondente forma simmetrizzata, che non dipende dall'orientazione O. Chiamiamo *supporto* di $\alpha\in\Gamma_+$ il sottografo completo di S che ha per vertici tutti gli $i\in I$ per cui $\alpha_i>0$. L'*altezza* di α sarà il valore $|\alpha|:=\sum\alpha_i$.

Il *gruppo di Weyl* W di S è il gruppo di automorfismi di Γ generato dalle riflessioni semplici: se $i\in I$ è senza loop, definiamo *riflessione semplice* di centro i l'involuzione

$$s_i(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\boldsymbol{\varepsilon}_i)\boldsymbol{\varepsilon}_i\ \ \forall\ \alpha\in\Gamma.$$

Introduciamo ora la seguente notazione:

- Π è l'insieme degli $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ *radici semplici*, cioè tali che $i\in I$ sia senza loop;
- $M\subset\Gamma_+$ è il sottoinsieme degli α a supporto connesso per cui $(\alpha,\boldsymbol{\varepsilon}_i)\le 0\ \ \forall\ i\in I$, detto *camera fondamentale*;
- $\widetilde{M}\subset\Gamma_+$ è il sottoinsieme degli α a supporto sconnesso per cui $(\alpha,\boldsymbol{\varepsilon}_i)\le 0\ \ \forall\ i\in I$;
- $\Delta_+^{re}=W(\Pi)\cap\Gamma_+$ è l'insieme delle *radici reali positive*;
- $\Delta_+^{im}=W(M)\cap\Gamma_+$ rappresenta l'insieme delle *radici immaginarie positive*;
- $\Delta_+=\Delta_+^{re}\cup\Delta_+^{im}$ costituisce il *sistema di radici positive* associato a S.

Il teorema di Kac per campi algebricamente chiusi ci permette di stabilire un sorprendente legame tra i possibili vettori dimensionali delle rappresentazioni indecomponibili e il sistema di radici positive associato a (S,O):

Teorema (Kac, 1980)**.** *Sia (S,O) un quiver e $\alpha\in\Gamma_+$. Si fissi un campo base algebricamente chiuso.*

a) se $\alpha\notin\Delta_+$, allora non esistono rappresentazioni indecomponibili di dimensione α.

b) se $\alpha\in\Delta_+^{re}$ allora esiste esattamente una rappresentazione indecomponibile di dimensione α, a meno di isomorfismo.

c) se $\alpha \in \Delta_+^{im}$ allora esistono infinite classi di isomorfismo di rappresentazioni indecomponibili di dimensione α.[1]

Si osservi che tutti e tre gli statement non dipendono dall'orientazione O.

Partendo dalle osservazioni facili, è banale notare che per $\alpha \in \Pi$ esiste un'unica rappresentazione indecomponibile, e che tutte le rappresentazioni di dimensione $\alpha \in \widetilde{M}$ sono decomponibili. Con un po' più di lavoro, ma con un approccio abbastanza elementare, si riesce a trattare anche il caso di $\alpha \in M$ (rimandiamo a [Naz73] per la trattazione del caso particolare di supporto Euclideo), mediante un argomento di tipo dimensionale (vedasi sezione (3.1)) che possiamo riassumere nel seguente lemma:

Lemma. *Se $\alpha \in M$ e $\mathbb{F}$ è algebricamente chiuso, allora esiste un aperto non banale di $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$ composto da rappresentazioni indecomponibili.*

Un generico $\alpha \in \Gamma_+$ è coniugato tramite W a una dimensione di Π, M, o $\widetilde{M}$: se $\alpha \notin \Delta_+^{re} \cup \Delta_+^{im}$, un qualsiasi $\beta \in W \cdot \alpha$ di altezza minima deve stare in $\widetilde{M}$. Sarebbe quindi estremamente utile trovare un collegamento tra gli indecomponibili in $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$ e quelli in $\mathfrak{m}^{w(\alpha)}(S, O, \mathbb{F})$, dove $w \in W$.

In quest'ottica sarà chiara l'estrema importanza dei funtori di riflessione, di cui parleremo nella sezione (2.5): nel caso in cui S abbia un vertice i che è *pozzo o sorgente* rispetto all'orientazione O - cioè con solo archi uscenti o entranti - è possibile definire un funtore da $\mathrm{Rep}(S, O, \mathbb{F})$ in $\mathrm{Rep}(S, r_i(O), \mathbb{F})$, dove l'orientazione $r_i(O)$ si ottiene capovolgendo gli archi che coinvolgono i. I funtori di riflessione hanno il pregio di creare una corrispondenza biunivoca tra le rappresentazioni indecomponibili di dimensione α di (S, O) e quelle di dimensione $s_i(\alpha)$ di $(S, r_i(O))$ (se $\alpha \neq \varepsilon_i$).

Non dobbiamo farci subito prendere dall'entusiasmo in quanto a priori un'orientazione O su S potrebbe non generare nemmeno un pozzo o una sorgente. La chiave di volta sarà distogliere momentaneamente l'attenzione dai campi algebricamente chiusi per concentrarci sui campi finiti: su questi riusciremo a far vedere che il numero di indecomponibili e assolutamente indecomponibili non dipende dall'orientazione su S. Potremo così sceglierla liberamente in modo da poter applicare i funtori di riflessione che vogliamo e dimostrare il teorema di Kac per campi finiti:

Teorema. *Sia (S, O) un quiver, $\alpha \in \Gamma_+$. Se il campo base delle rappresentazioni è un campo finito $\mathbb{F}_q$ ($q = p^t$) allora valgono le seguenti:*

a) Il numero di indecomponibili in $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F}_q)$ (a meno di isomorfismo) non dipende dall'orientazione O. Se i è senza loop e $\alpha \neq \varepsilon_i$, allora gli indecomponibili di dimensione α corrispondono in numero a quelli di dimensione $s_i(\alpha)$ (nello specifico non ce ne sono se $s_i(\alpha) \notin \Gamma_+$).

b) Se $\alpha \in \Delta_+^{re}$, esiste un'unica rappresentazione indecomponibile di dimensione α.

[1] In realtà per campi base in caratteristica 0 in questa tesi dimostreremo solo l'esistenza di almeno una rappresentazione indecomponibile.

c) Se $\alpha \notin \Delta_+$ allora non esistono rappresentazioni indecomponibili di dimensione α.

Per mostrare l'indipendenza dall'orientazione del numero di indecomponibili sarà comodo tradurre la nozione di indecomponibilità di $x \in \mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F}_q)$ in termini dell'$\mathbb{F}_q$-rango riduttivo di $(\mathrm{GL}(\alpha))_x$, si veda (2.3.4) e (3.2.3). A questo punto modificheremo opportunamente O in modo da poter applicare un qualsiasi funtore di riflessione; il teorema di Kac su campi finiti sarà una conseguenza di queste osservazioni chiave. Ci sarà inoltre utile ottenere dei risultati simili per le rappresentazioni assolutamente indecomponibili su $\mathbb{F}_q$, per i quali saranno necessari degli argomenti di teoria di Galois, si veda sezione (3.4).

Tornando ai campi algebricamente chiusi, potremo finalmente mostrare l'esistenza di indecomponibili di dimensione $\alpha \in \Delta_+$ anche su campo $\overline{\mathbb{F}}_p$, e più in generale per campi algebricamente chiusi di caratteristica finita. Per far ciò su campi algebricamente chiusi in caratteristica 0 sfrutteremo un po' di teoria degli schemi.

Anche per dimostrare la decomponibilità delle rappresentazioni di dimensione $\alpha \notin \Delta_+$ su $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ tornerà estremamente utile il risultato nel caso dei campi finiti: la nozione di indecomponibilità di una rappresentazione (V, ϕ) su $\mathbb{F}$ può essere formulata in modo equivalente dicendo che V non ammette morfismi di proiezione su sottospazi propri, ovvero che il sistema di equazioni con matrici di indeterminate

$$X_j \phi_h = \phi_h X_i \quad \forall\, h:\ i \to j, \qquad\qquad X_i^2 = X_i \quad \forall\, i \in I \tag{1}$$

non ha soluzioni in $\mathbb{F}$ diverse dalle banali $(0, \dots, 0),\ (\mathrm{Id}_{V_1}, \dots, \mathrm{Id}_{V_n})$. Per il Nullstellensatz ciò significa che l'ideale associato a questi due punti è uguale all'ideale generato dalle equazioni (1). Supporre per assurdo che esista una rappresentazione indecomponibile di dimensione $\alpha \notin \Delta_+$ comporterebbe, mediante un argomento di specializzazione, l'esistenza di una rappresentazione indecomponibile di dimensione α su un campo finito opportuno.

Veniamo adesso alla seconda parte della tesi. Dato un grafo S a n vertici senza loop, gli associamo una matrice A di dimensione n tale che

$$A_{ij} = 2\delta_{ij} - \#\{h \in \Omega \text{ con coppia di estremi } (i, j)\}.$$

La matrice A così definita è una matrice di Cartan simmetrica, a partire dalla quale si può costruire un'algebra di Lie $G(A)$, detta "algebra di Kac-Moody". Essa è costruita a partire da una terna di sottospazi $G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_1$ con rispettive basi $(f_i)_{i \le n},\ (h_i)_{i \le n},\ (e_i)_{i \le n}$ nei quali valgono le relazioni

$$[e_i f_j] = \delta_{ij} e_i, \quad [h_i e_j] = A_{ij} e_j, \quad [h_i f_j] = -A_{ij} f_j, \quad [h_i h_j] = 0 \qquad \forall\, i, j \le n.$$

Nel capitolo (4) creeremo le basi per una definizione formale di $G(A)$, mentre nel capitolo (5) andremo a studiarne alcune proprietà: l'obiettivo principale sarà stabilire una corrispondenza tra le dimensioni delle rappresentazioni indecomponibili di (S, O) su campi algebricamente chiusi (O è un'orientazione qualsiasi), e gli *spazi radice positivi* di $G(A)$.

Nel caso in cui A sia non degenere, gli spazi radice $G_\alpha(A)$ sono tutti i sottospazi non banali della forma

$$G_\alpha(A) := \{x \in G(A) : \ [hx] = \alpha(h)x \ \ \forall\ h \in G_0\}, \quad \alpha \in \Gamma \setminus \{0\}.$$

Nella tesi daremo una definizione di radici reali e immaginarie per le algebre di Kac-Moody, che dimostreremo essere coerente con la definizione data nel contesto dei quiver.

La conclusione principale a cui giungeremo è riassumibile nel seguente teorema:

Teorema. *Sia (S, O) un quiver senza loop, A la matrice di Cartan simmetrica associata, e $\alpha \in \Gamma_+$. Sia inoltre $\mathbb{F}$ un campo algebricamente chiuso. Allora vale che:*

> *$\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$ contiene rappresentazioni indecomponibili se e solo se $G_\alpha(A)$ è uno spazio radice, cioè $G_\alpha(A) \neq 0$.*

Guardare al sistema di radici di S con questo nuovo punto di vista, oltre ad essere interessante di per sé, metterà in luce alcune sue proprietà strutturali, che sarebbero altrimenti state tutt'altro che scontate.

Parte I

Prerequisiti

Capitolo 1

Prerequisiti

1.1 Tori algebrici

Per questa sezione fissiamo k un campo qualsiasi e K la sua chiusura algebrica.

Definizione 1.1.1. Sia X un K-schema affine, cioè isomorfo a $\mathrm{Spec}(A)$ con A una K-algebra. Una *k-forma* di X è un k-schema affine $\mathrm{Spec}(A_0)$, con A_0 una k-algebra, tale che

$$K \otimes_k \mathrm{Spec}(A_0) \simeq \mathrm{Spec}(A).$$

Nel seguito diremo, un po' impropriamente, che un K-schema è *definito su k* per intendere che è munito di una k-forma, che spesso sarà evidente nei casi che studieremo.

Sia B un altro K-schema definito su k, con k-forma $\mathrm{Spec}(B_0)$. Diremo che un morfismo

$$F : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$$

è *definito su k* se induce un morfismo

$$f : \mathrm{Spec}(A_0) \to \mathrm{Spec}(B_0) \quad \text{tale che} \quad F = K \otimes_k f,$$

o equivalentemente se $F^*(A_0) \subset B_0$.

Un K-schema di gruppo G è *definito su k* se è munito di una k-forma tale che il prodotto, l'inverso e l'identità siano tutte mappe definite su k.

Definizione 1.1.2. Un toro n-dimensionale è un K-schema di gruppo T isomorfo allo schema di gruppo

$$\mathrm{Spec}(\underbrace{K[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_n, t_n^{-1}]}_{A})$$

con inverso, prodotto e identità descritti, a livello di algebra di Hopf, da

$A \to A$	$A \to A \otimes A$	$A \to K$
$t_i \mapsto t_i^{-1}$	$t_i \mapsto t_i \otimes t_i$	$t_i \mapsto 1$

Definizione 1.1.3. Sia T un toro n-dimensionale definito su k, con k-forma isomorfa a un k-schema di gruppo $\mathrm{Spec}(A_0)$. Se vale che $\mathrm{Spec}(A_0) \simeq \mathrm{Spec}(k[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_n, t_n^{-1}])$ come schemi di gruppo, diremo che T è k-split.

Lemma 1.1.4. *Sia T un toro n-dimensionale k-split. Allora $\mathrm{Aut}(T) \simeq \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, e gli automorfismi sono tutti definiti su k.*

Dimostrazione. Cercare gli automorfismi di T equivale a cercare tutti gli isomorfismi di $K[T]$ come K-algebra di Hopf, dove ricordiamo che le operazioni di inverso, prodotto e identità sono rispettivamente

$$\begin{array}{ccc} K[T] \to K[T] & K[T] \to K[T] \otimes K[T] & K[T] \to K \\ t_i \mapsto t_i^{-1} & t_i \mapsto t_i \otimes t_i & t_i \mapsto 1 \end{array}$$

Sia $f \in \mathrm{Aut}(T)$, e f^* il relativo isomorfismo di algebre di Hopf. Se postcomponiamo f con p_i, proiezione sull'i-esimo fattore, otteniamo a livello di anelli di coordinate una mappa $f^* \circ p_i^* : R \to K[T]$ ($R = K[t_1, t_1^{-1}]$) che è omomorfismo di algebre di Hopf. Detto $r_i = f^* \circ p_i^*(t_1)$ affermiamo che deve essere necessariamente un monomio monico t^{v_i} con v_i multi-indice a valori in $\mathbb{Z}$. In effetti invertibili devono andare in invertibili quindi $r_i(t)$ è effettivamente un monomio. Inoltre dovendo commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & K[T] \\ \downarrow & & \downarrow \\ R \otimes R & \longrightarrow & K[T] \otimes K[T] \end{array}$$

segue immediatamente che $r_i(t)$ deve essere anche monico. Ora, per la suriettività di f, gli $r_i(t)$ e i loro inversi devono generare tutti i monomi, ovvero i vettori di esponenti v_i devono generare $\mathbb{Z}^n$ come $\mathbb{Z}$ modulo. In altre parole la matrice $A_{ij} = (v_i)_j$ deve essere invertibile in $\mathbb{Z}$, cioè stare in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$. Viceversa si verifica facilmente che una tale richiesta è sufficiente per avere un isomorfismo di algebre di Hopf, definito su k. □

Lemma 1.1.5. *Sia T un toro k-split, e S un sottotoro definito su k (con k-forma indotta) di dimensioni l e s rispettivamente. Allora S è k-split e T/S è un toro k-split di dimensione $l - s$.*

Dimostrazione. Per prima cosa sappiamo che l'omomorfismo di algebre di Hopf associato all'inclusione $i^* : K[T] \to K[S]$ è surgettivo. Inoltre, per quanto già osservato $i^*(t_j) = r_j = t^{v_j}$ monomio monico ($v_j \in \mathbb{Z}^s$), e per suriettività la mappa indotta a livello di esponenti $a : \mathbb{Z}^l \to \mathbb{Z}^s$ ammette una retrazione b che include $\mathbb{Z}^s$ in $\mathbb{Z}^l$. A meno di comporre con un automorfismo di $\mathbb{Z}^l$ (cioè a livello di gruppi algebrici con un automorfismo di T), possiamo supporre che tale retrazione mandi e_i in $c_i e_i$ per ogni $i \leq s$, con $c_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ e e_i vettore della base canonica. Se per assurdo una delle costanti, facciamo c_1, fosse maggiore di 1, allora $i^*(t_1^{c_1}) = t_1$ che è chiaramente assurdo in quanto t_1 non è una radice c_1-esima dell'unità

nell'anello dei polinomi, quindi non lo è neanche in $K[S]$ per il lemma di Gauss. Quindi abbiamo

$$i^* : t_j \mapsto t_j \quad \forall\ j \leq s$$

e perciò, sempre a meno di comporre con un automorfismo di $\mathbb{Z}^l$, possiamo supporre anche che

$$i^* : t_j \mapsto 0 \quad \forall\ j > s.$$

Ci siamo quindi ricondotti tramite automorfismi di T (definiti su k) all'inclusione standard (quella sulle prime coordinate) del toro s-dimensionale nel toro l-dimensionale. In questo caso il sottotoro e il quoziente sono ovviamente k-split. □

Lemma 1.1.6. *Siano S e T due tori k-split di dimensioni s e l, e N un qualsiasi gruppo algebrico lineare definito su k tale che esista una successione esatta definita su k*

$$1 \to S \to N \to T \to 1$$

(i.e. S è isomorfo come gruppo algebrico alla sua immagine in N, e T al quoziente di N per l'immagine di S). Allora valgono le seguenti:

a) N è isomorfo a $S \times T$, cioè è un toro $s + l$-dimensionale.

b) Se k è un campo perfetto il toro N (definito su k) è k-split.

Dimostrazione. La soluzione del punto a) è strutturata in 3 step:

Step 1: Mostriamo innanzitutto che N centralizza S. Notiamo subito che N è connesso. Sia $f : N \times S \to S$ l'azione per coniugio di N su S, con omomorfismo di anelli di coordinate associato

$$\begin{aligned} f^* : K[S] &\to K[N] \otimes K[S] \\ t_i &\mapsto \sum_{v \in \mathbb{Z}^s} f_{i,v} \otimes t^v \end{aligned}$$

(le $f_{i,v}$ sono tutte nulle a meno di un numero finito).

Restringendo a una mappa da $\{x\} \times S$ in S (che corrisponde a valutare in $x \in N$ una funzione di $K[N] \otimes K[S]$) si ottiene un automorfismo f_x^* di S, che a livello di anelli di coordinate deve perciò mandare $t_i \mapsto t^{v_{x,i}}$. Questo significa che tutte le $f_{i,v}$ tranne $f_{i,v_{x,i}}$ (che varrà 1) si devono annullare in x. Analogamente sull'aperto dove non si annulla $f_{i,v_{x,i}}$ devono annullarsi tutte le altre $f_{i,v}$, e $f_{i,v_{x_i}}$ deve valere 1. Quindi tale aperto è anche un chiuso non vuoto, ovvero tutto N per connessione. Ma esso corrisponde per definizione a tutti gli $y \in N$ con $v_{y,i} = v_{x,i}$, quindi in particolare ponendo $x = 1$ si ha $v_{y,i} = v_{1,i} = (e_i) \quad \forall\ y \in N,\ i \leq s$, dove e_i è il vettore i-esimo della base canonica. Dunque l'azione per coniugio di N su S è banale.

Step 2: Nello stesso stile si mostra che N è commutativo: consideriamo l'azione di N su se stesso per coniugio. Poiché S agisce banalmente questa si traduce in un'azione di $N/S \simeq T$ su N, e quest'ultima è banale per un discorso identico a quello fatto poco fa.

Step 3: Ora, la rappresentazione standard di N su $K[N]$ ne induce una di S che si scompone in sottorappresentazioni definite su k

$$\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}^s} R_m, \quad \text{dove} \;\; x\cdot r = x^m r \;\; \forall\, x\in S, r\in R_m,$$

in quanto S linearmente riduttivo e k-split. Dal fatto che $K[N]$ si surietti su $K[S]$ e dal lemma di Schur segue che nessuno degli R_m è banale. Notiamo che R_m è anche N-invariante (con l'azione di N definita su k), infatti presi $x\in S,\ y\in N,\ r\in R_m$ si ha per commutatività che $x\cdot(y\cdot r) = y\cdot(x\cdot r) = x^m(y\cdot r)$ da cui $y\cdot r\in R_m$. Da questo segue che in R_m esiste un r_m autovettore comune a tutti gli $y\in N$: per dirlo si consideri il sottospazio invariante V di dimensione minima. Se su esso tutti gli $y\in N$ agiscono come multipli dell'identità abbiamo concluso, altrimenti si consideri un autospazio $W\subsetneq V$ di un qualche y. Esso è N-invariante per commutatività di N, contro l'ipotesi di minimalità di V.

R_0 è lo spazio dove S agisce banalmente, quindi contiene la copia di $K[T]\subset K[N]$ data dall'omomorfismo di anelli di coordinate associato al morfismo S-invariante $N\to T$. Siano quindi $f_j\in K[T],\ j\le l$ definiti su k tali che $x\cdot f_j = x_j f_j$ per ogni $x=(x_1,\dots,x_l)\in T,\ j\le l$. Consideriamo infine la sottorappresentazione, definita su k, data da

$$V = \operatorname{span}(r_{e_1},\dots,r_{e_s},f_1,\dots,f_l).$$

Questa è chiaramente fedele. Poiché le fibre hanno dimensione 0, l'immagine in $\mathrm{GL}(V)$ ha stessa dimensione del toro massimale ma deve essere anche chiusa e contenuta in esso, quindi è proprio $(K^*)^n$. Un morfismo bigettivo con codominio un toro è un isomorfismo, in quanto il toro è una varietà normale (ad esempio perché il suo anello di coordinate è a fattorizzazione unica). Altrimenti, vale più in generale che morfismi di gruppi bigettivi sono anche isomorfismi.

Veniamo adesso al punto b). È un fatto di semplice verifica che il toro N definito su k campo perfetto è k-split se e solo se $\mathrm{Gal}(K/k)$ agisce banalmente sui suoi caratteri (visti come elementi dell'anello di coordinate). Infatti, detta $\mathrm{Spec}(A_0)$ la k-forma di N, e detto f^* l'isomorfismo da $K[t_1,t_1^{-1},\dots,t_{s+l}]\xrightarrow{f^*} K\otimes_k A_0$, abbiamo che $\mathrm{Gal}(K/k)$ agisce banalmente sui t_i se e solo se $f^*(t_i)\in A_0\ \forall\, i$, che implica che $A_0\simeq k[t_1,t_1^{-1},\dots,t_{s+l},t_{s+l}^{-1}]$.

In realtà per far vedere che N è k-split ci basta mostrare che un sottoreticolo di dimensione $s+l$ (i.e. di indice finito) del reticolo dei caratteri sta nell'anello di coordinate della k-forma di N (cioè è fissato da $\mathrm{Gal}(K/k)$). Infatti in tal caso per ogni carattere x esisterebbe l intero tale che x^l è un punto fisso di $\mathrm{Gal}(K/k)$. Ma preso $\sigma\in\mathrm{Gal}(K/k)$ si

ha che $\sigma(x)^l = \sigma(x^l) = x^l \Leftrightarrow \sigma(x) = x$ per via della struttura di reticolo, quindi anche x è punto fisso.

Il toro S è k-split, quindi $\mathrm{Gal}(K/k)$ agisce banalmente sui suoi caratteri (visti come elementi dell'anello di coordinate). Di conseguenza $\sigma(R_m) = R_m \ \ \forall\, \sigma \in \mathrm{Gal}(K/k),\ m \in \mathbb{Z}^s$. Indichiamo ora con $\widetilde{k}/k$ un'estensione finita di k in cui è definito $r_{e_i} \ \ \forall\, i \leq s$. Si ponga

$$\widetilde{r}_i := \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\widetilde{k})} \sigma(r_{e_i}).$$

Per quanto appena osservato, $\widetilde{r}_i \in R_{e_i}^d = R_{de_i}$, dove abbiamo indicato con d il grado dell'estensione $\widetilde{k}/k$. Per costruzione $\widetilde{r}_i$ è un elemento definito su $\widetilde{k}$ che viene lasciato fisso da $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)$, quindi è un elemento definito su k. Consideriamo adesso la seguente rappresentazione di N definita su k:

$$\widetilde{V} = \mathrm{span}(\widetilde{r}_1, \ldots, \widetilde{r}_s, f_1, \ldots, f_l).$$

Questa rappresentazione non è necessariamente fedele, ma possiamo star certi che le fibre devono essere tutte finite: si osserva facilmente che il Ker di questa rappresentazione è contenuto in S ed è dato da tutti gli elementi $x = (x_1, \ldots, x_s) \in S$ tali che $x_i^d = 1 \ \ \forall\, i \leq s$, che sono chiaramente in numero finito. Avendo le fibre dimensione nulla, ed essendo l'immagine della rappresentazione contenuta nel toro massimale di $\mathrm{GL}(\widetilde{V})$, con un discorso identico a quello del punto a) si ottiene che N si deve suriettare nel toro massimale di $\mathrm{GL}(\widetilde{V})$. Abbiamo quindi un'inclusione dell'anello di coordinate della k-forma del toro massimale di $\mathrm{GL}(\widetilde{V})$ in quello della k-forma di N. Ma tale inclusione è anche un omomorfismo di algebre di Hopf, quindi per quanto già osservato nei lemmi precedenti manda caratteri in caratteri mantenendo la struttura di reticolo. Questo ci permette di concludere, perché l'immagine del reticolo dei caratteri di $\mathrm{GL}(\widetilde{V})$ sta nell'anello di coordinate della k-forma di N, ed è un sottoreticolo di dimensione $s + l$ del suo reticolo dei caratteri. □

Parte II

Quiver

Capitolo 2

Rappresentazioni di quiver

Questo è un capitolo introduttivo alla teoria delle rappresentazioni di quiver su un campo $\mathbb{F}$. Dopo un primo approccio con un punto di vista prettamente categoriale, ci concentreremo sulla struttura algebrica dello spazio delle rappresentazioni, per studiare in particolare quelle indecomponibili. Queste ultime sono un po' i "mattoncini di base" sui quali si struttura tutta la categoria delle rappresentazioni (di dimensione finita) di un quiver: ogni oggetto è infatti isomorfo a una somma diretta finita di indecomponibili, e per di più l'insieme dei fattori della decomposizione è unico a meno di isomorfismo, grazie al teorema di Krull-Schmidt.

Sempre con l'obiettivo di studiare le rappresentazioni indecomponibili, nell'ultima sezione del capitolo parleremo di funtori di riflessione.

2.1 Rappresentazioni di quiver

Definizione 2.1.1. Un *quiver* è una coppia (S, O), dove S è un multigrafo, cioè il dato di un insieme di vertici I e un insieme di archi Ω con estremi in I; O è un'orientazione su S, cioè una coppia di funzioni $s, t : \Omega \to I$ che specificano rispettivamente quale tra i due estremi di un dato arco è la *sorgente* e quale il *target*. Scriveremo compattamente $h : i \to j$ per dire che l'arco h ha sorgente i e target j.

Noi lavoreremo sempre con quiver con numero finito di vertici e di archi, ma ammettiamo l'esistenza di loop, cioè di archi con estremi coincidenti. Non sarà inoltre restrittivo per i nostri scopi supporre S connesso.

Definizione 2.1.2. Una *rappresentazione* (finita) V, o più formalmente (V, ϕ), su campo $\mathbb{F}$ di un quiver (S, O) è il dato di una famiglia di $\mathbb{F}$-spazi vettoriali (finiti) indicizzata dai vertici

$$V = (V_i)_{i \in I},$$

e di una famiglia di applicazioni lineari indicizzata dagli archi

$$\phi = \left(\phi_h : \ V_{s(h)} \to V_{t(h)}\right)_{h \in \Omega}.$$

Indichiamo con $\mathrm{Rep}(S, O, \mathbb{F})$ la classe delle rappresentazioni finite su $\mathbb{F}$ di (S, O).

D'ora in poi supporremo tacitamente che le rappresentazioni siano finite.

Definizione 2.1.3. Un *morfismo* di rappresentazioni $f : (V, \phi) \to (W, \psi)$ è una famiglia di applicazioni indicizzata dai vertici

$$f = (f_i : V_i \to W_i)_{i \in I} \quad \text{dove} \quad f_{t(h)} \circ \phi_h = \psi_h \circ f_{s(h)} \ \ \forall\ h \in \Omega.$$

E' un facile esercizio osservare che i morfismi appena definiti danno una struttura di categoria a $\mathrm{Rep}(S, O, \mathbb{F})$.

Definizione 2.1.4. Un *cammino* h di lunghezza $l \geq 0$ con sorgente $i \in I$ e target $j \in I$ è una sequenza ordinata di archi $h = (h_l, h_{l-1}, \ldots, h_1)$ (vuota se $l = 0$) tale per cui, se $l \neq 0$,

$$s(h_1) = i,\ t(h_l) = j, \quad s(h_{k+1}) = t(h_k) \ \ \forall\ 1 \leq k < l.$$

E' naturale richiedere che, nel caso di cammini banali (di lunghezza 0), sorgente e target coincidano. Estendiamo le funzioni s e t ai cammini, ponendo $s(h) = i$ e $t(h) = j$.

Denotiamo con e_i il cammino banale centrato in $i \in I$.

Dati due cammini $h = (h_l, \ldots h_1)$ e $h' = (h'_{l'}, \ldots, h'_1)$ definiamo l'operazione $*$ di concatenazione tra essi ponendo

$$h * h' := \begin{cases} (h_l, \ldots, h_1, h'_{l'} \ldots, h'_1), \ \ \text{con} \ \ s(h * h') = s(h'),\ t(h * h') = t(h) \ \ \text{se} \ \ t(h') = s(h), \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Definizione 2.1.5. Chiamiamo *algebra dei cammini* di (S, O) lo spazio vettoriale A con base formale composta da tutti i cammini (compresi i banali), dotato del prodotto ottenuto estendendo per bilinearità l'operazione (associativa) di concatenazione appena definita.

L'identità è l'elemento $\sum_{i \in I} e_i$ in quanto $e_i * e_j = \delta_{ij} e_i$.

Sia $V \in \mathrm{Rep}(S, O, \mathbb{F})$ una rappresentazione qualsiasi. Si ha una naturale struttura di A-modulo sinistro su $\bigoplus_{i \in I} V_i$ definendo l'azione di A nel modo seguente: poniamo

$$\forall\ i \in I \qquad e_i \cdot (v + w) := v \ \ \text{se} \ \ v \in V_i \ \ \text{e} \ \ w \in \bigoplus_{j \neq i} V_j,$$

$$\forall\ h \in \Omega, \qquad h \cdot (v + w) := \phi_h(v) \ \ \text{se} \ \ v \in V_{s(h)} \ \ \text{e} \ \ w \in \bigoplus_{j \neq s(h)} V_j.$$

Estendiamo poi l'azione a tutti i cammini per associatività, e infine a tutti gli elementi di A per linearità. In effetti 1_A agisce banalmente.

In realtà, come vedremo adesso, le rappresentazioni di (S, O) sono soltanto un modo comodo per vedere i moduli sinistri sull'algebra di cammini, di dimensione finita come spazi vettoriali.

Proposizione 2.1.6. *Esiste un'equivalenza di categorie* $\mathrm{Rep}(S,O,\mathbb{F}) \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}}$ *A-moduli sinistri di dimensione finita.*

Dimostrazione. Costruiamo il funtore F:

- Data $V \in \mathrm{Rep}(S,O,\mathbb{F})$, poniamo $F(V) = \bigoplus_{i\in I} V_i$ dotato della struttura di A-modulo appena descritta.
- Dato un morfismo di rappresentazioni $f : (V,\phi) \to (W,\psi)$ poniamo $F(f) = \bigoplus_{i\in I} f_i : F(V) \to F(W)$, che oltre ad essere un'applicazione lineare è anche un omomorfismo di A-moduli in quanto per definizione $f_{t(h)} \circ \phi_h(v) = \psi_h \circ f_{s(h)}$.

Le proprietà funtoriali sono una banale verifica.

Costruiamo adesso il funtore G:

- Dato M un A-modulo con $\dim_{\mathbb{F}} M < \infty$, poniamo $F(M) = (U,\phi)$ dove

$$U_i = e_i M \ \ \forall\ i \in I, \qquad \phi_h(v) = hv \ \ \forall\ h \in \Omega,\ v \in U_{s(h)}$$

- Dato $f : M \to N$ omomorfismo di A-moduli, poniamo $F(f)_i : e_iM \to e_iN$ l'applicazione indotta da f. E' una buona definizione in quanto $f(e_iN) = e_if(N) \subset e_iM$.

Anche in questo caso le proprietà funtoriali sono pressoché immediate, come è immediato che $G \circ F(V) \simeq_{\mathrm{nat}} V$ e che $F \circ G(M) \simeq_{\mathrm{nat}} M$. □

Per quanto appena visto, non ci sorprende che operazioni di somma diretta, kernel e immagine di omomorfismi, moduli quoziente e sottomoduli, teoremi di omomorfismo, trovino i loro analoghi nel linguaggio delle rappresentazioni:

Somme dirette.
$(V \oplus W)_i := V_i \oplus W_i$ con $\phi_h^{V\oplus W} := \phi_h^V \oplus \phi_h^W$.

Sottorappresentazioni e quozienti.
$V \subset W$ se $V_i \subset W_i$ e $\phi_h^V = \phi_h^W\big|_{V_{s(h)}}$. Sotto queste ipotesi definiremo $(W/V)_i := W_i/V_i$ con le relative applicazioni lineari che saranno il passaggio al quoziente delle applicazioni ϕ_h^W.

Kernel e immagini.
Dato $f : V \longrightarrow W$ omomorfismo di rappresentazioni, $(\operatorname{Ker} f)_i := \operatorname{Ker} f_i$ mentre $(\operatorname{Im} f)_i := \operatorname{Im} f_i$ con le relative ϕ_h definite restringendo ϕ_h^V e ϕ_h^W una volta notato che $\phi_h^V(\operatorname{Ker} f_{s(h)}) \subset \operatorname{Ker} f_{t(h)}$ e che $\phi_h^W(\operatorname{Im} f_{s(h)}) \subset \operatorname{Im} f_{t(h)}$.

Teoremi di omomorfismo.

- Dato un morfismo suriettivo $f : V \twoheadrightarrow W$, si ha $W \simeq V/\operatorname{Ker} f$.

- Date $U \subset V \subset W$ rappresentazioni, $W/V \simeq (W/U)/(V/U)$.
- Date $U, V \subset W$ rappresentazioni, $(U+V)/V \simeq U/(U \cap V)$.

Definizione 2.1.7. Chiamiamo *dimensione* di una rappresentazione V il vettore

$$\dim V := (\dim V_1, \dim V_2 \ \ldots, \dim V_n) \in \mathbb{N}^I.$$

Dato un vettore dimensionale α, si definisce *supporto* di α, abbreviato $\mathrm{supp}(\alpha)$, il sottografo completo di S costituito dai vertici i tali che $\alpha_i \neq 0$. Scriviamo $|\alpha|$ per indicare $\sum_{i \in I} \alpha_i$, detta *altezza* di α.

Definizione 2.1.8. Se $i \in I$ è un vertice di (S, O) senza loop, denotiamo S_i l'unica rappresentazione di (S, O) dove tutti gli spazi vettoriali sono banali tranne l'i-esimo, che ha dimensione 1. Tale rappresentazione è detta *rappresentazione semplice di centro i*.

Definizione 2.1.9. Una rappresentazione $V \in \mathrm{Rep}(S, O, \mathbb{F})$ si dice *indecomponibile* se non è banale, e non è isomorfa a una somma diretta di rappresentazioni non banali su $\mathbb{F}$. In altre parole, è equivalente all'indecomponibilità come A-modulo.

Definizione 2.1.10. Una rappresentazione $V \in \mathrm{Rep}(S, O, \mathbb{F})$ è detta *assolutamente indecomponibile* se $\overline{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} V \in \mathrm{Rep}(S, O, \overline{\mathbb{F}})$ è indecomponibile, cioè se V è indecomponibile vista come rappresentazione su $\overline{\mathbb{F}}$.

Ovviamente le rappresentazioni assolutamente indecomponibili sono anche indecomponibili.

Possiamo cominciare a porci una serie di domande naturali del tipo:

> "Per quali quiver esistono un numero finito di rappresentazioni indecomponibili a meno di isomorfismo? Fissato uno di questi quiver, riesco a caratterizzare le indecomponibili in qualche modo?"
>
> "Fissato un quiver (S, O), per quali $\alpha \in \mathbb{N}^I \setminus \{0\}$ esistono rappresentazioni indecomponibili di dimensione α? Nel caso quante sono? La risposta dipende dall'orientazione O?"

Il teorema di Gabriel (1972), dimostrato dal matematico francese Pierre Gabriel, dà una risposta esauriente alla prima domanda nel caso di campo base algebricamente chiuso. Il teorema di Kac (1980), dovuto al matematico russo Victor Kac (da non confondersi con il polacco Mark Kac) risponde invece alla seconda domanda, nell'ipotesi di campi algebricamente chiusi o di campi finiti.

2.2 Forma di Eulero

In questa sezione andiamo a definire la forma di Eulero associata a un quiver (S, O) e la corrispondente forma simmetrizzata le cui proprietà, dipendenti dalla struttura di S, ci torneranno utili in seguito.

Denotiamo con Γ il reticolo $\mathbb{Z}^I$ indicizzato dai vertici di S, poniamo $\Gamma_+ = \mathbb{N}^I \setminus \{0\}$ e $\Gamma_- = (\mathbb{Z}_{\leq 0})^I \setminus \{0\}$. Chiamiamo $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ l'i-esimo elemento della base standard di Γ, e poniamo $L = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma$. Diremo che $\alpha \in \Gamma$ è positivo (o che $\alpha > 0$) se $\alpha \in \Gamma_+$, diremo che è negativo (o che $\alpha < 0$) se $\alpha \in \Gamma_-$.

Definizione 2.2.1. Definiamo la forma bilineare $\langle\ ,\ \rangle$ su L in modo che dati $\alpha, \beta \in L$ si abbia

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i \in I} \alpha_i \beta_i - \sum_{h : i \to j} \alpha_i \beta_j.$$

$\langle\ ,\ \rangle$ prende il nome di *forma di Eulero*. Indicheremo con $(\alpha, \beta) := \frac{1}{2}\left(\langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha \rangle\right)$ la corrispondente forma simmetrizzata.

Ci chiediamo adesso quando il prodotto scalare $(\ ,\ )$, che per definizione non dipende dall'orientazione O, sia definito o semidefinito positivo. Nel primo caso diremo che S è un *grafo di Dynkin*; se invece $(\ ,\ )$ è semidefinito ma non definito parleremo invece di *grafo Euclideo*. Si può dare una semplice classificazione dei grafi che rientrano in una di queste due categorie.

Proposizione 2.2.2. *I grafi di tipo Euclideo e di tipo Dynkin sono tutti e solo quelli della tabella della pagina seguente. I pedici corrispondono al numero di vertici per i grafi Dynkin, al numero di vertici diminuito di* 1 *per gli Euclidei.*

Il radicale nel caso Euclideo è 1*-dimensionale, e gli interi affiancati ai vertici indicano le componenti di un suo generatore* δ*.*

Inoltre, i grafi Euclidei sono gli unici ad avere prodotto scalare degenere.

Figura 2.1: Grafi di Dynkin

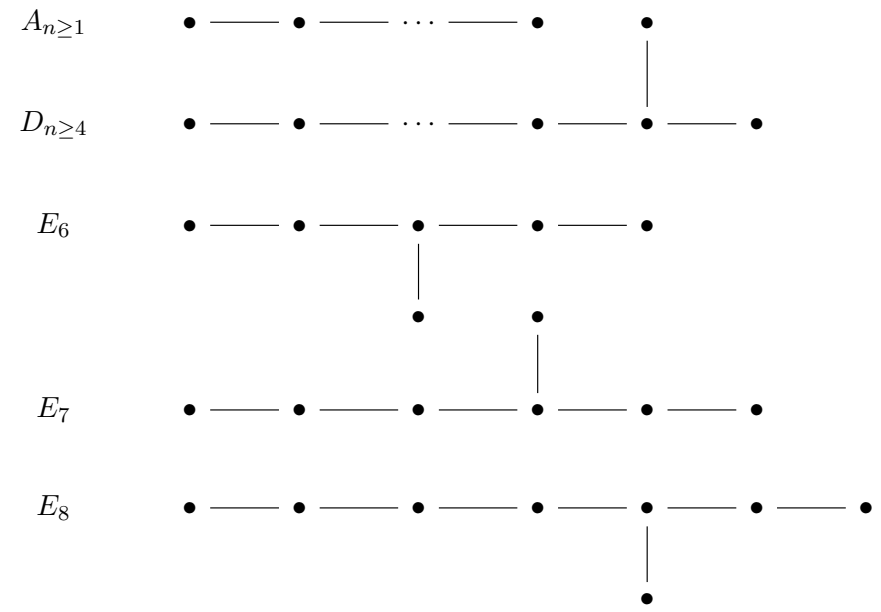
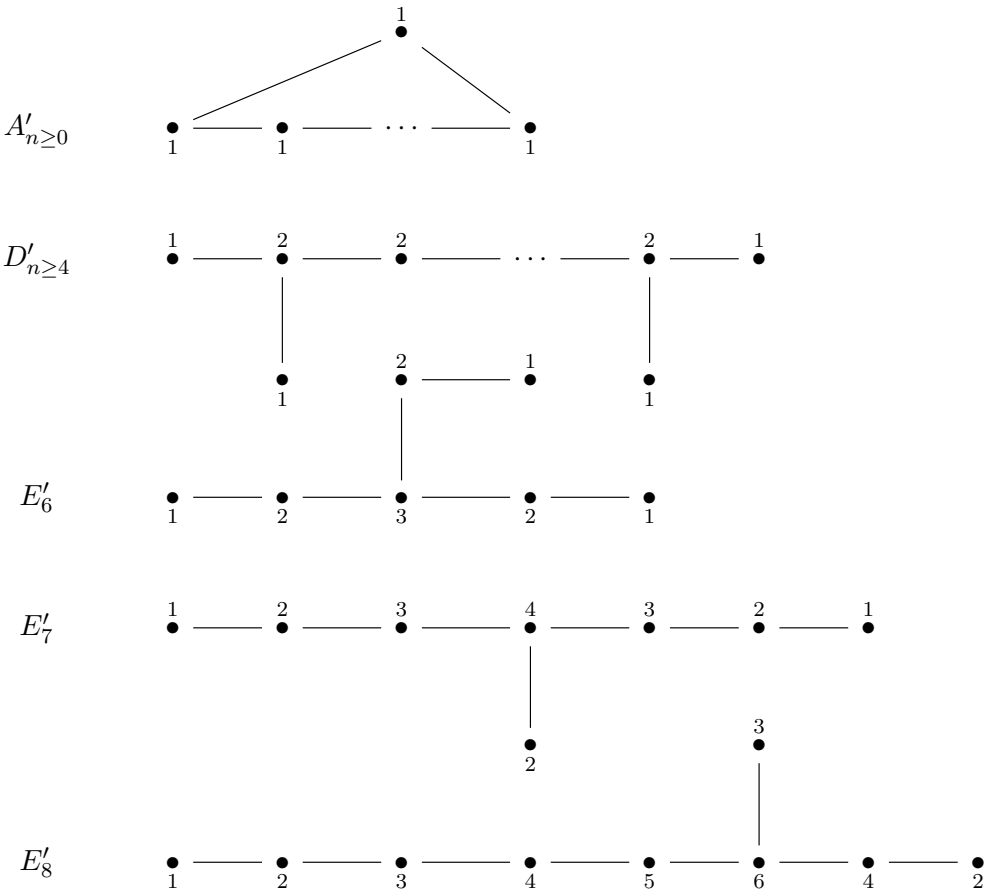


Figura 2.2: Grafi Euclidei



2.3 Spazio delle rappresentazioni

Dato un quiver (S, O), si fissi una dimensione $\alpha \in \Gamma_+$. Indichiamo con $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$ lo spazio delle rappresentazioni V su $\mathbb{F}$, con $V_i = \mathbb{F}^{\alpha_i} \ \ \forall\, i \in I$.

Osservazione 2.3.1. *Poiché una rappresentazione di $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$ è univocamente determinata dalla scelta delle applicazioni associate agli archi, appare naturale fare la seguente identificazione:*

$$\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F}) = \bigoplus_{h:\ i \to j} \mathrm{Hom}(V_i, V_j) \simeq \bigoplus_{h:\ i \to j} V_i^* \otimes V_j = \bigoplus_{h:\ i \to j} (\mathbb{F}^{\alpha_i})^* \otimes \mathbb{F}^{\alpha_j}$$

In questo modo evidenziamo la struttura di spazio vettoriale finito di $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$, quindi di varietà algebrica definita su $\mathbb{F}$.

Siano adesso

$$\mathrm{GL}(\alpha) := \bigoplus_{i \in I} \mathrm{GL}(\alpha_i, \overline{\mathbb{F}}), \qquad\qquad G^\alpha := \frac{\mathrm{GL}(\alpha)}{\overline{\mathbb{F}}(\mathrm{Id}_i)_{i \in I}}.$$

Allo scopo di studiare le classi di isomorfismo degli elementi di $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$, consideriamo l'azione del gruppo algebrico $\mathrm{GL}(\alpha)$ su $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \overline{\mathbb{F}})$, definita su $\mathbb{F}$, data da

$$g \cdot (\phi_h) = \left(g_{t(h)} \circ \phi_h \circ g_{s(h)}^{-1} \right) \ \ \forall\ g = (g_i) \in \mathrm{GL}(\alpha),\ (\phi_h) \in \mathfrak{m}^\alpha(S, O, \overline{\mathbb{F}}).$$

Poiché gli elementi di $\overline{\mathbb{F}}(\mathrm{Id}_i)$ agiscono banalmente, si ha un'azione indotta del gruppo algebrico G^α. Segue direttamente dalla definizione di isomorfismo di rappresentazioni che due elementi di $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$ sono isomorfi se e solo se stanno nella stessa $G^\alpha(\mathbb{F})$-orbita.

Siamo adesso già in grado di mostrare una prima freccia del teorema di Gabriel.

Teorema 2.3.2. *Sia $\mathbb{F}$ un campo algebricamente chiuso. Se un quiver (S, O) ha un numero finito di rappresentazioni indecomponibili su $\mathbb{F}$ (a meno di isomorfismo), allora è di tipo Dynkin.*

Dimostrazione. Se esistono finite indecomponibili allora, fissata una dimensione $\alpha \in \Gamma_+$, anche le classi di isomorfismo in $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$ devono essere finite in numero: ognuna di esse corrisponde a una somma diretta di indecomponibili che ha al più $|\alpha|$ fattori, ma ogni fattore può essere scelto in finiti modi quindi le combinazioni possibili sono limitate. Questo significa che il numero di orbite dell'azione di $G^\alpha(\mathbb{F})$ è finito, quindi per l'irriducibilità di $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$ esiste un'orbita densa $G^\alpha \cdot x$. Equivalentemente, il morfismo di varietà algebriche $f : G^\alpha \to \mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$ con $g \mapsto g \cdot x$ è dominante, quindi

$$\dim G^\alpha \geq \dim \mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F}) = \sum_{h : i \to j} \alpha_i \alpha_j.$$

Adesso però G^α ha una dimensione facilmente calcolabile poiché

$$\dim G^\alpha = \dim \mathrm{GL}(\alpha) - \dim \mathbb{F}(\mathrm{Id}_i) = -1 + \sum_{i\in I} \alpha_i^2$$

da cui, ricordando la definizione di $(\ ,\ )$, si ha che $(\alpha,\alpha) \geq 1$. Dall'arbitrarietà di α concludiamo che il prodotto scalare $(\ ,\ )$ è definito positivo, quindi che il grafo S è di tipo Dynkin. □

Rimandiamo l'altra implicazione del teorema di Gabriel a un momento successivo; sarebbe futile affrontarla adesso poiché sarà una semplice conseguenza della teoria che svilupperemo per dimostrare il teorema di Kac.

L'ultimo obiettivo questa sezione è di cercare di tradurre in qualche modo la nozione di indecomponibilità di una rappresentazione $x \in \mathfrak{m}^\alpha(S,O,\mathbb{F})$ in termini dell'azione di G^α su $\mathfrak{m}^\alpha(S,O,\overline{\mathbb{F}})$.

Definizione 2.3.3. Sia G un gruppo lineare algebrico che agisce su una varietà algebrica affine X, dove G, X e l'azione sono definiti su $\mathbb{F}$. Diremo che un punto $x \in X(\mathbb{F})$ è $\mathbb{F}$-*quasilibero* se G_x (i.e. lo stabilizzatore di x) non contiene tori $\mathbb{F}$-split non banali.

Proposizione 2.3.4. *$x \in \mathfrak{m}^\alpha(S,O,\mathbb{F})$ è $\mathbb{F}$-indecomponibile se e solo se è un punto $\mathbb{F}$-quasilibero rispetto all'azione di G^α.*

Dimostrazione. Una freccia è chiara: se x è una rappresentazione su $\mathbb{F}$ decomponibile in $y \oplus z$, allora il suo stabilizzatore in $\mathrm{GL}(\alpha)$ contiene il toro $\mathbb{F}$-split $\overline{\mathbb{F}}^* \mathrm{Id}_y \times \overline{\mathbb{F}}^* \mathrm{Id}_z$. Questo, passato al quoziente, diventa un toro 1-dimensionale $\mathbb{F}$-split contenuto in $(G^\alpha)_x$.

Viceversa, supponiamo esista un toro $\mathbb{F}$-split non banale in $(G^\alpha)_x$. Per il lemma (1.1.6), la sua preimmagine (definita su $\mathbb{F}$) tramite la proiezione $\mathrm{GL}(\alpha) \to G^\alpha$ è un toro $\mathbb{F}$-split T, contenente strettamente $\overline{\mathbb{F}}(\mathrm{Id}_i)_{i\in I}$. Consideriamo la naturale rappresentazione di $T(\mathbb{F})$ su $\bigoplus_{i\in I} V_i$: essa deve avere almeno 2 componenti isotipiche, perché altrimenti T sarebbe interamente contenuto in $\overline{\mathbb{F}}(\mathrm{Id}_i)$ (ciascun suo elemento agirebbe moltiplicando tutto lo spazio per uno stesso scalare). Il fatto che il toro sia nello stabilizzatore della rappresentazione significa che l'azione di $T(\mathbb{F})$ su $\bigoplus_{i\in I} V_i$ commuta con quella di A (l'algebra dei cammini su campo $\mathbb{F}$), quindi le sue componenti isotipiche sono sottospazi invarianti rispetto all'algebra di cammini. Segue che x è decomponibile come A-modulo, e questo conclude. □

2.4 Sistemi di radici e gruppo di Weyl

In questa sezione introduciamo i concetti di gruppo di Weyl e di sistemi di radici di un grafo. Le definizioni che daremo adesso saranno ad hoc per i nostri scopi, ma la scelta dei nomi non è certo casuale: nella seconda parte della tesi verrà fuori il legame con la struttura delle algebre di Kac-Moody.

Definizione 2.4.1. Dato un quiver (S, O), sia $i \in I$ un suo vertice senza loop. Definiamo la *riflessione semplice* di centro $i \in I$ nel modo seguente:

$$s_i : L \longrightarrow L, \qquad s_i(\alpha) = \alpha - 2(\alpha, \boldsymbol{\varepsilon}_i)\boldsymbol{\varepsilon}_i \ \ \forall\ \alpha \in L.$$

Con dei semplici passaggi si verifica che

$$s_i^2 = \mathrm{Id}, \qquad s_i(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = -\boldsymbol{\varepsilon}_i, \qquad (s_i\alpha, s_i\beta) = (\alpha, \beta) \ \ \forall\ \alpha, \beta \in L.$$

Definizione 2.4.2. Il *gruppo di Weyl* di (S, O), indicato con W, è il sottogruppo di automorfismi di L generato dalle riflessioni semplici.

Per quanto appena osservato il prodotto scalare $(\ ,\ )$ è invariante tramite l'azione del gruppo di Weyl.

Definizione 2.4.3. Chiamiamo *camera fondamentale* l'insieme

$$M = \{\alpha \in \Gamma_+ :\ \operatorname{supp}\alpha \text{ connesso}, (\alpha, \boldsymbol{\varepsilon}_i) \leq 0 \ \ \forall\ i \in I\}.$$

In particolare se $\alpha \in M$ si ha $(\alpha, \alpha) \leq 0$. Introduciamo adesso la seguente notazione:

$\Pi = \{\boldsymbol{\varepsilon}_i,\ i \in I \text{ senza loop}\}$ è l'insieme delle *radici semplici* di (S, O).

$\Delta^{re} = W(\Pi)$ è detto insieme delle *radici reali* di (S, O). Si denoti con Δ^{re}_+ (risp. Δ^{re}_-) le radici reali positive (risp. negative).

$\Delta^{im}_+ = W(M) \cap \Gamma_+$ è detto insieme delle *radici immaginarie positive* di (S, O).

$\Delta_+ = \Delta^{re}_+ \sqcup \Delta^{im}_+$ rappresenta il *sistema di radici positive* di (S, O), mentre Δ_+ il sistema di radici positive.

Per l'invarianza del prodotto scalare si ha che $\alpha \in \Delta^{re} \Rightarrow\ (\alpha, \alpha) = 1$, mentre $\beta \in \Delta^{im}_+ \Rightarrow (\beta, \beta) \leq 0$, quindi radici immaginarie positive e reali positive sono effettivamente insiemi disgiunti.

Osservazione 2.4.4. *Per come è definita la camera fondamentale vale*

$$\mathbb{Q}^+\Delta^{im}_+ \subset \Delta^{im}_+ \ \ \forall\ d \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Al contrario, se $\alpha \in \Delta^{re}_+$ allora $\mathbb{Q}\alpha \cap \Delta_+ = \{\alpha\}$, poiché tutti gli altri elementi in $\mathbb{Q}\alpha$ hanno "norma" positiva diversa da 1.

Notiamo anche che se $\operatorname{supp}\alpha$ è Euclideo e $\alpha \in \Delta^{im}_+$ allora necessariamente α sta nel radicale 1-dimensionale, quindi è della forma $k\delta$ con $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ e δ definito in figura (2.2).

Proposizione 2.4.5. *Se un grafo S è di tipo Dynkin, le radici reali sono in numero finito. Segue che anche il gruppo di Weyl deve essere finito.*

Dimostrazione. Essendo la forma (,) definita positiva, essa induce una norma su L che lo rende isomorfo a $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico, dove n è il numero di vertici di S. Gli $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ sono una base di L, quindi Γ può essere visto come un reticolo in L, in particolare non ha punti di accumulazione. Le radici reali hanno tutte norma 1; se fossero infinite dovrebbero accumularsi da qualche parte in quanto la palla di raggio 1 è compatta, e questo non può accadere.

Un automorfismo del gruppo di Weyl permuta le radici reali positive, per definizione. Inoltre è determinato univocamente dalla sua azione su Δ^{re}, in quanto contiene la base la base costituita dagli $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ (S è di tipo Dynkin quindi senza loop). Concludiamo che W si immerge in S_n, quindi è finito. □

2.5 Funtori di riflessione

Concludiamo il capitolo parlando di funtori di riflessione, uno strumento estremamente utile per creare un ponte tra rappresentazioni con stesso grafo S e dimensioni coniugate tramite gruppo di Weyl.

Sia (S, O) un quiver. Diciamo che un suo vertice $i \in I$ è un *pozzo* (risp. *sorgente*) se ha solo archi entranti (risp. uscenti). Se ci troviamo in uno di questi due casi diciamo che il vertice i è *ammissibile* e denotiamo con $r_i(O)$ l'orientazione ottenuta capovolgendo gli archi che coinvolgono i. Si noti che un vertice ammissibile è per definizione senza loop.

Definizione 2.5.1. Sia i un vertice sorgente di (S, O). Definiamo il *funtore di riflessione* r_i^- da $\mathrm{Rep}(S, O, \mathbb{F})$ in $\mathrm{Rep}(S, r_i(O), \mathbb{F})$ nel modo seguente:

- Data la rappresentazione $(V, \phi) \in \mathrm{Rep}(S, O, \mathbb{F})$ poniamo

$$r_i^-(V)_j := V_j \ \ \forall\, j \neq i, \qquad\qquad r_i^-(V)_i := \mathrm{Coker}\ (V_i \xrightarrow{\bigoplus \phi_h} \bigoplus_{h:\ i \to l} V_l)$$

  Se $h:\ i \to j$ in (S, O), nel nuovo quiver avremo $h:\ j \to i$ e porremo come $r_i^-(\phi)_h$ la composizione

$$V_j \to \bigoplus_{s:\ i \to l} V_l \to \mathrm{Coker}(V_i \to \bigoplus_{s:\ i \to l} V_l),$$

  dove la prima è un'inclusione nell'h-esimo fattore e la seconda è una proiezione. Se invece h non coinvolge i poniamo semplicemente $r_i^-(\phi)_h = \phi_h$.

- Sia ora f un morfismo di rappresentazioni di (S, O) da V in U. Poniamo

$$r_i^-(f)_j = f_j \ \ \forall\, j \neq i,$$

mentre $r_i^-(f)_i$ sarà la mappa indotta dal passaggio al quoziente illustrato nel diagramma commutativo a righe esatte qui sotto:

$$\begin{array}{ccccccc} V_i & \longrightarrow & \bigoplus_{h:\ i\to j} V_j & \longrightarrow & r_i^-(V)_i & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle f_i} & & \downarrow{\scriptstyle \oplus f_j} & & \vdots{\scriptstyle r_i^-(f)_i} & & \\ U_i & \longrightarrow & \bigoplus_{h:\ i\to j} U_j & \longrightarrow & r_i^-(U)_i & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Segue direttamente dalla commutatività del diagramma che $r_i(f)$ è un morfismo di rappresentazioni in $(S, r_i(O))$. Allo stesso modo seguono banalmente anche le proprietà funtoriali di r_i^-.

Definizione 2.5.2. Sia adesso i un vertice pozzo del quiver (S, O). Definiamo il *funtore di riflessione* r_i^+ da $\mathrm{Rep}(S, O)$ in $\mathrm{Rep}(S, r_i(O))$ nel modo seguente:

- Data la rappresentazione $(V, \phi) \in \mathrm{Rep}(S, O, \mathbb{F})$ poniamo

$$r_i^+(V)_j := V_j \ \ \forall\ j \neq i, \qquad\qquad r_i^+(V)_i := \mathrm{Ker}\ (\bigoplus_{h:\ l\to i} V_l \xrightarrow{\oplus \phi_h} V_i)$$

  Se $h:\ j \to i$ in (S, O), nel nuovo quiver avremo $h:\ i \to j$ e porremo come $r_i^+(\phi)_h$ la composizione

$$\mathrm{Ker}\ (\bigoplus_{s:\ i\to l} V_l \to V_i) \to \bigoplus_{s:\ i\to l} V_l \to V_j,$$

  dove la prima è un'inclusione e la seconda è una proiezione sul h-esimo fattore. Se invece h non coinvolge i poniamo semplicemente $r_i^+(\phi)_h = \phi_h$.

- Sia ora f un morfismo di rappresentazioni di (S, O) da V in U. Poniamo

$$r_i^+(f)_j := f_j \ \ \forall\ j \neq i,$$

  mentre $r_i^+(f)_i$ sarà la mappa che estende il seguente diagramma commutativo a righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & r_i^+(V)_i & \longrightarrow & \bigoplus_{h:\ l\to i} V_l & \longrightarrow & V_i \\ & & \vdots{\scriptstyle r_i^+(f)_i} & & \downarrow{\scriptstyle \oplus f_l} & & \downarrow{\scriptstyle f_i} \\ 0 & \longrightarrow & r_i^+(U)_i & \longrightarrow & \bigoplus_{h:\ l\to i} U_l & \longrightarrow & U_i \end{array}$$

Anche in questo caso segue dalla commutatività del diagramma che $r_i^+(f)$ è un morfismo di rappresentazioni di $(S, r_i(O))$, e che le proprietà funtoriali sono soddisfatte.

Date $U, V \in \mathrm{Rep}(S, O.\mathbb{F})$, è immediato verificare che $r_i^\pm(U \oplus V) \simeq r_i^\pm(U) \oplus r_i^\pm(V)$. È altrettanto facile notare che $r_i^\pm(V) = 0 \Leftrightarrow V_j = 0 \ \ \forall\ j \neq i$. Grazie a questi due semplici fatti e al prossimo lemma, arriveremo a dimostrare che i funtori di riflessione $r_i^\pm$ mandano indecomponibili diversi da S_i in indecomponibili.

Lemma 2.5.3. *Se i è sorgente di (S, O), e una rappresentazione V è tale che sia iniettiva la mappa $V_i \xrightarrow{\oplus \phi_h} \bigoplus_{h:\ i\to l} V_l$, allora si ha un isomorfismo naturale*

$$r_i^+ r_i^-(V) \simeq V.$$

Se i è pozzo e V è tale che $\bigoplus_{h:\ l\to i} V_l \xrightarrow{\oplus \phi_h} V_i$ sia surgettiva, allora si ha un isomorfismo naturale

$$r_i^- r_i^+(V) \simeq V.$$

Dimostrazione.

Caso 1: i sorgente.

Costruiamo l'isomorfismo naturale di rappresentazioni f ponendo innanzitutto $f_j = \mathrm{Id} \quad \forall\, j \neq i$. Notiamo adesso che per definizione

$$r_i^+ r_i^-(V)_i = \mathrm{Ker} \bigoplus_{h:\ i\to l} V_l \xrightarrow{\oplus r_i^-(\phi)_h} r_i^-(V)_i$$

(scrivere $h: i \to l$ o $h: l \to i$ nei pedici delle somme dirette fa poca differenza, quindi usiamo sempre l'orientazione O).

Poiché abbiamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow V_i \xrightarrow{\oplus \phi_h} \bigoplus_{h:\ i\to l} V_l \longrightarrow \mathrm{Coker}(V_i \longrightarrow \bigoplus_{h:\ i\to l} V_l) = r_i^-(V)_i$$

possiamo scegliere come isomorfismo tra V_i e $r_i^+ r_i^-(V)_i$

$$f_i = \bigoplus_{h:\ i\to l} \phi_h$$

Per verificare che la f così definita sia in effetti un morfismo ci basta osservare che fissato $h: i \to j$ si ha $\phi_h = p \circ f_i$, dove $p: \bigoplus_{s:\ i\to l} V_l \to V_j$ è la proiezione sull'h-esimo fattore. $r_i^+ r_i^-(\phi)_h$ è invece il risultato dell'inclusione di $\mathrm{Ker} \bigoplus_{h:\ i\to l} V_l \longrightarrow r_i^-(V)_i$ in $\bigoplus_{h:i\to l} V_l$ composta con la proiezione p, quindi in effetti $\mathrm{Id} \circ \phi_h = r_i^+ r_i^-(\phi)_h \circ f_i$.

Caso 2: i pozzo.

Stavolta è più comodo definire f da $r_i^- r_i^+(V)$ in V. Anche qui è naturale porre $f_j = \mathrm{Id} \quad \forall\, j \neq i$. Ora, per definizione

$$r_i^- r_i^+(V)_i = \mathrm{Coker}\ r_i^+(V)_i \xrightarrow{\oplus r_i^+(\phi)_h} \bigoplus_{h:\ l\to i} V_l$$

Dal diagramma con riga esatta

$$r_i^+(V)_i = \mathrm{Ker}\,(\bigoplus_{h:\ l\to i} V_l \to V_i) \longrightarrow \bigoplus_{h:\ l\to i} V_l \xrightarrow{\oplus \phi_h} V_i \longrightarrow 0$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow p \quad \nearrow f_i$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad r_i^- r_i^+(V_i)$$

si ricava che possiamo scegliere come f_i l'isomorfismo indotto da $\bigoplus_{h:l\to i} \phi_h$ passato al quoziente p. Per verificare infine che la f così definita sia effettivamente un morfismo sia $h:\ j \to i$. Notiamo che $r_i^- r_i^+(\phi)_h$ è per definizione l'inclusione q di V_j nell'h-esimo fattore di $\bigoplus_{s:l\to i} V_l$ seguita dalla proiezione p. Se poi componiamo con f_i otteniamo proprio $(\bigoplus_{s:l\to i} \phi_s) \circ q$, quindi vale $f_i \circ r_i^- r_i^+(\phi)_h = \phi_h \circ \mathrm{Id}$.

□

Notiamo subito che data una qualsiasi rappresentazione V, allora $r_i^\pm(V)$ soddisfa le ipotesi del lemma (2.5.3), e di conseguenza non si può decomporre in due rappresentazioni una delle quali sia completamente concentrata nel vertice i.

Osservazione 2.5.4. *Se V è una rappresentazione che soddisfa le ipotesi del lemma* (2.5.3)*,* $\dim r_i^\pm V = s_i(\dim V)$.

Dimostrazione. È chiaramente sufficiente concentrarci sulla dimensione dello spazio vettoriale di $r_i^\pm(V)_i$. Sia nel caso i sorgente con $V_i \xrightarrow{\oplus \phi_h} \bigoplus_{h:i\to l} V_l$ iniettiva, che nel caso i pozzo con $\bigoplus_{h:l\to i} V_l \xrightarrow{\oplus \phi_h} V_i$ suriettiva, segue dalla definizione di $(r_i^\pm V)_i$ che

$$\dim(r_i^\pm V)_i = -\dim V_i + \bigoplus_{h:i\to l} \dim V_l = (\dim V)_i - 2(\dim V, \boldsymbol{\varepsilon}_i)\boldsymbol{\varepsilon}_i.$$

□

Teorema 2.5.5. *Sia i vertice ammissibile per (S, O), e $V \neq S_i$ una rappresentazione indecomponibile. Allora $r_i^\pm V$ è indecomponibile e* $\dim(r_i^\pm V) = s_i(\dim V)$.

Dimostrazione. Notiamo che V deve soddisfare le ipotesi del lemma (2.5.3). Se infatti i è sorgente e $V_i \to \bigoplus_{h:i\to l} V_l$ non è iniettiva allora detto K il suo kernel, e H tale che $K \oplus H \simeq V_i$ avremmo che V si decompone in $U \oplus W$ con

$$U_j = V_j \ \ \forall\ j \neq i, \quad U_i = H; \qquad\qquad W_j = 0 \ \ \forall\ j \neq i, \quad W_i = K.$$

Analogamente se i è pozzo e $\bigoplus_{h:l\to i} V_l \to V_i$ non è suriettiva allora posta H la sua immagine e K tale che $K \oplus H = V_i$ avremmo che V si decompone in $U \oplus W$ definiti come sopra.

In luce di questo, la seconda parte del teorema è una diretta conseguenza dell'osservazione precedente. Supponiamo adesso per assurdo che $r_i^\pm(V)$ si decomponga in $A \oplus B$.

Sicuramente A e B non sono concentrate nel vertice i, di conseguenza $V \simeq r_i^{\mp} r_i^{\pm}(V) \simeq r_i^{\mp}(A) \oplus r_i^{\mp}(B)$ sarebbe una decomposizione non banale di V, assurdo. □

Osservazione 2.5.6. *Se i è ammissibile per (S, O) e $\alpha \in \Gamma_+ \setminus \{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$, l'esistenza di un'indecomponibile di dimensione α ci garantisce che $s_i\alpha \in \Gamma_+$.*

Capitolo 3

Il teorema di Kac

In questo capitolo dimostreremo il teorema di Kac. Si tratta in realtà di una serie di teoremi che possiamo organizzare in due macrocategorie:

1) Teoremi di non esistenza

2) Teoremi di esistenza

Prima di procedere, presentiamo i principali enunciati (non nello stesso ordine con cui li affronteremo).

Teorema (teoremi di non esistenza)**.** *Sia (S, O) un quiver, e $\mathbb{F}$ un campo finito o un campo algebricamente chiuso.*

a) Se $\alpha \notin \Delta_+$ allora non esistono rappresentazioni indecomponibili di dimensione α.

b) Se $\alpha \in \Delta_+^{re}$ allora esiste al più una rappresentazione indecomponibile di dimensione α, a meno di isomorfismo.

Teorema (teoremi di esistenza)**.** *Sia (S, O) un quiver e $\alpha \in \Gamma_+$.*

a) Se $\alpha \in \Delta_+^{im}$ e $\mathbb{F}$ è un campo algebricamente chiuso, allora esistono infinite rappresentazioni indecomponibili non isomorfe, di dimensione α.

a) Se $\alpha \in \Delta_+^{re}$ e $\mathbb{F}$ è un campo finito o un campo algebricamente chiuso, allora esiste una rappresentazione indecomponibile di dimensione α.

3.1 Supporto nella camera fondamentale

In questa sezione ci occuperemo dello studio delle rappresentazioni indecomponibili su campo $\mathbb{F}$ algebricamente chiuso, di dimensione α, sotto la restrizione $\alpha \in M$ (i.e. $\mathrm{supp}(\alpha)$ connesso, e $(\alpha, \boldsymbol{\varepsilon}_i) \leq 0 \ \ \forall\, i \in I$).

Il caso $\mathrm{supp}\,\alpha$ Euclideo e $\alpha \in \Delta_+^{im}$ - cioè della forma $k\delta$, con δ definito in figura (2.2) - è stato ampiamente studiato (si veda ad esempio [Naz73]), ma noi ne enunciamo solo il principale risultato, senza dimostrazione.

Teorema 3.1.1. *Sia (S,O) un quiver, e $\alpha \in \Delta_+^{im}$ a supporto Euclideo, quindi della forma $k\delta$. Allora su campi algebricamente chiusi esiste una famiglia a un parametro di rappresentazioni indecomponibili di dimensione α non isomorfe tra loro.*

Lemma 3.1.2. *Supponiamo che $\alpha = \beta^1 + \cdots + \beta^r$ dove $r \geq 2$ e i $\beta^j \geq 0$ non nulli. Allora vale una delle seguenti:*

1) $(\alpha,\alpha) < \sum(\beta^i,\beta^i)$;

2) $\mathrm{supp}(\alpha)$ *è Euclideo,* $(\alpha,\alpha) = 0, \quad \mathbb{Q}\alpha = \mathbb{Q}\beta^i \quad \forall\ i \leq r.$

Dimostrazione. Supponiamo che la condizione 1) non valga, cioè che $(\alpha,\alpha) - \sum(\beta^i,\beta^i) \geq 0$. Riarrangiando si ottiene

$$\sum_i (\alpha - \beta^i, \beta^i) \geq 0 \tag{3.1}$$

quindi esiste un β scelto fra i β^i per cui $(\alpha-\beta,\beta) \geq 0$. Manipoliamo un po' questo prodotto scalare, indicando con J l'insieme dei vertici di $\mathrm{supp}\,\alpha$:

$$(\alpha-\beta,\beta) = \sum_{i\in J}(\alpha_i-\beta_i)\beta_i(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_i) + \sum_{(i\neq j)\in J}(\alpha_j-\beta_j)\beta_i(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j) =$$

$$= \sum_{i\in J}(\alpha_i-\beta_i)\beta_i\frac{(\alpha,\boldsymbol{\varepsilon}_i)}{\alpha_i} + \sum_{i\neq j\in J}\left(\frac{\beta_i^2}{\alpha_i^2} - \frac{\beta_j}{\alpha_j}\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right)\alpha_i\alpha_j(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j),$$

che è uguale, simmetrizzando la seconda sommatoria, a

$$\sum_{i\in J}(\alpha_i-\beta_i)\beta_i\ \underset{\leq 0}{(\alpha,\boldsymbol{\varepsilon}_i)}\ /\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j\in J}\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}-\frac{\beta_j}{\alpha_j}\right)^2\alpha_i\alpha_j\ \underset{\leq 0}{(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)} \geq 0.$$

Quindi tutti i termini di ciascuna sommatoria devono annullarsi. In particolare quando i vertici i e j sono connessi da almeno un arco $\frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{\beta_j}{\alpha_j}$ in quanto $(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j) < 0$. Ricordando che $\mathrm{supp}\,\alpha$ è connesso, si ottiene così che $\mathbb{Q}\beta = \mathbb{Q}\alpha$. Ma allora $\alpha_i - \beta_i > 0 \quad \forall\ i \in J$ quindi $(\alpha,\boldsymbol{\varepsilon}_i) = 0 \quad \forall\ i \in J$, da cui segue che $\mathrm{supp}(\alpha)$ è Euclideo (il prodotto scalare in J è degenere), e che $(\alpha,\alpha) = (\alpha-\beta,\beta) = 0$. Abbiamo dimostrato che nessun addendo della sommatoria in (3.1) può essere positivo, quindi sono tutti nulli e il discorso fatto si può riapplicare a uno qualsiasi dei β^i, cioè la richiesta del punto 2) è soddisfatta. □

Grazie a questo lemma possiamo adesso affermare che, nel caso di supporto non Euclideo, "quasi tutte" le rappresentazioni di dimensione α sono indecomponibili.

Teorema 3.1.3. *Sia (S,O) un quiver e $\mathbb{F}$ un campo algebricamente chiuso. Se $\alpha \in \Gamma_+$ sta nella camera fondamentale e ha supporto non Euclideo allora esiste un aperto non banale di $\mathfrak{m}^{\alpha}_{\mathrm{ind}}(S,O,\mathbb{F})$ fatto di indecomponibili.*

Dimostrazione. Siano $\beta, \gamma \geq 0$ non nulli tali che $\beta + \gamma = \alpha$. Consideriamo il morfismo di varietà algebriche

$$f_{\beta\gamma} : \ \mathrm{GL}(\alpha) \times \mathfrak{m}^{\beta}(S, O, \mathbb{F}) \times \mathfrak{m}^{\gamma}(S, O, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathfrak{m}^{\alpha}(S, O, \mathbb{F})$$
$$(g, u, v) \longmapsto g \cdot (u \oplus v)$$

Se vediamo $\mathrm{GL}(\beta) \times \mathrm{GL}(\gamma)$ immerso (come matrici diagonali a blocchi) in $\mathrm{GL}(\alpha)$, possiamo definire una sua azione algebrica sul dominio di $f_{\beta\gamma}$ ponendo

$$h \cdot (g, u, v) = (gh^{-1}, h_1 \cdot u, h_2 \cdot v) \ \text{ dove } h = (h_1, h_2) \in \mathrm{GL}(\beta) \times \mathrm{GL}(\gamma).$$

Questa azione è chiaramente libera quindi la chiusura di ciascuna sua orbita ha dimensione $d = \dim \mathrm{GL}(\beta) + \dim \mathrm{GL}(\gamma)$. Inoltre $f_{\beta\gamma}(h \cdot (g, u, v)) = f_{\beta\gamma}(g, u, v)$, di conseguenza le fibre di $f_{\beta\gamma}$ hanno tutte dimensione almeno d. Questo, unito al fatto che

$$\dim \mathfrak{m}^{\lambda}(S, O, \mathbb{F}) - \dim \mathrm{GL}(\lambda) = -(\lambda, \lambda) \ \ \forall\ \lambda \in \Gamma_+,$$

ci permette di dire che

$$\dim \overline{\mathrm{Im}(f_{\beta\gamma})} \leq \dim \mathrm{GL}(\alpha) + \dim \mathfrak{m}^{\beta}(S, O, \mathbb{F}) + \dim \mathfrak{m}^{\gamma}(S, O, \mathbb{F}) - d \Rightarrow$$

$$\dim \mathfrak{m}^{\alpha}(S, O, \mathbb{F}) - \dim \overline{\mathrm{Im}(f_{\beta\gamma})} \geq -(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) \overset{(3.1.2)}{>} 0$$

Per concludere osserviamo che un oggetto decomponibile di $\mathfrak{m}^{\alpha}(S, O, \mathbb{F})$ deve essere contenuto in

$$\bigcup_{\beta+\gamma=\alpha} \mathrm{Im}(f_{\beta\gamma}),$$

che per quanto detto ha chiusura di dimensione strettamente inferiore a $\dim \mathfrak{m}^{\alpha}(S, O, \mathbb{F})$. □

Corollario 3.1.4. *Sia (S, O) un quiver. Se $\alpha \in \Gamma_+$ sta nella camera fondamentale allora esistono infinite rappresentazioni indecomponibili di dimensione α su un campo $\mathbb{F}$ algebricamente chiuso, non isomorfe tra loro.*

Dimostrazione. Il caso supporto Euclideo è una diretta conseguenza del teorema (3.1.1). Altrimenti, nello stesso stile della dimostrazione (2.3.2), supponiamo per assurdo che esistano finite G^{α}-orbite di indecomponibili in $\mathfrak{m}^{\alpha}(S, O, \mathbb{F})$. Allora una di queste, $G^{\alpha} \cdot x$, deve contenere nella sua chiusura l'aperto (irriducibile) fatto di indecomponibili ottenuto nel teorema appena mostrato; in altre parole dev'essere densa. Tuttavia questo significa che la mappa $G \to \mathfrak{m}^{\alpha}(S, O, \mathbb{F})$ tale che $g \mapsto g \cdot x$ è dominante e quindi che $\dim G^{\alpha} \geq \dim \mathfrak{m}^{\alpha}(S, O, \mathbb{F})$. Ma allora $(\alpha, \alpha) - 1 \geq 0$, che è assurdo perché $\alpha \in M$. □

3.2 Teorema di Kac su campi finiti

In questa sezione andremo a studiare lo spazio delle rappresentazioni di quiver assumendo che il campo $\mathbb{F}$ di definizione sia un campo finito $\mathbb{F}_q$ (dove $q = p^t$). Vedremo che la trattazione di questo caso, oltre ad essere già interessante di per sé, sarà essenziale per ottenere risultati anche per campi algebricamente chiusi. Ma andiamo con ordine.

Indichiamo con $\mathcal{I}^\alpha(S, O, q)$ il numero di classi di isomorfismo di rappresentazioni di (S, O), di dimensione α, indecomponibili su $\mathbb{F}_q$, o equivalentemente come il numero di orbite di $G^\alpha(\mathbb{F}_q)$ su $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \overline{\mathbb{F}}_q)$, con un rappresentante in $\mathbb{F}_q$ e $\mathbb{F}_q$-indecomponibile. I tre lemmi che seguiranno hanno l'obiettivo di mostrare che $\mathcal{I}^\alpha(S, O, q)$ non dipende dall'orientazione O.

Lemma 3.2.1. *Sia G un gruppo finito e sia $V \simeq \mathbb{F}_q^n$ una sua rappresentazione su $\mathbb{F}_q$. Allora detta V^* la rappresentazione duale, il numero di orbite di G in V è pari al numero di orbite in V^*.*

Dimostrazione. Denotiamo con A (risp. A^*) lo spazio vettoriale delle funzioni (di insiemi) da V (risp. V^*) in $\mathbb{C}$, con la ovvia azione di G data da $g \cdot f = f(g^{-1}\bullet) \ \ \forall\ g \in G,\ f \in A$ (risp. A^*). Le funzioni G-invarianti di A e A^* corrispondono alle funzioni definite su V/G e V^*/G, quindi hanno dimensione - come spazi vettoriali - pari al numero di orbite di G su V e V^* rispettivamente. Siamo perciò alla ricerca di un isomorfismo di spazi vettoriali tra A^G e $(A^*)^G$. Sembra fatto ad hoc l'accoppiamento dato dalla trasformata di Fourier $\widehat{\ } :\ A \to A^*$ così definita:

$$\widehat{f}(\xi) = q^{-\frac{n}{2}} \sum_{v \in V} f(v)\chi(\xi(v)), \quad \forall\ \xi \in V^*,\ f \in A,$$

dove χ è un qualsiasi carattere complesso non banale del gruppo additivo $\mathbb{F}_q \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^t$. Innanzitutto è evidente che mandi funzioni G-invarianti in funzioni G-invarianti. Inoltre, usando l'isomorfismo canonico $V \simeq V^{**}$ e quindi $A \simeq A^{**}$, possiamo definire analogamente anche la trasformata $\widehat{\ } : A^* \to A$ e ottenere che $\forall\ f \in A$ vale

$$\widehat{\widehat{f}}\,(v) = q^{-\frac{n}{2}} \sum_{\xi \in V^*} \widehat{f}(\xi)\chi(v(\xi)) = q^{-n} \sum_{\substack{\xi \in V^* \\ w \in V}} f(w)\chi\left(\xi(v+w)\right) =$$

$$q^{-n} \sum_{\xi \in V^*} f(-v) + q^{-n} \sum_{u \in V \setminus \{0\}} f(u-v) \sum_{\xi \in V^*} \chi(\xi(u)) = f(-v)$$

in quanto

$$\sum_{\xi \in V^*} \chi\left(\xi(u)\right) = q^{n-1} \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \chi(x) = 0$$

perché somma di radici p-esime dell'unità tutte con molteplicità $|\ker \chi| = p^{t-1}$.

Ovviamente i medesimi passaggi ci fanno ottenere che $\widehat{\widehat{f}}\,(v) = f(-v)$ anche nel caso in cui $f \in A^*$ e $v \in V^*$, da cui segue che la trasformata è un isomorfismo tra A e A^*, e quindi un isomorfismo tra A^G e $(A^*)^G$, che è proprio ciò che cercavamo. □

Definizione 3.2.2. Siano G un gruppo lineare algebrico su $\overline{\mathbb{F}}_q$, e V una sua rappresentazione finita definita su $\mathbb{F}_q$. Sia T un toro $\mathbb{F}_q$-split di G. Denotiamo con $d(T,V)$ il numero di orbite $G(\mathbb{F}_q)\cdot x$, con $x \in V(\mathbb{F}_q)$, di $G(\mathbb{F}_q)$ su $V(\mathbb{F}_q)$ tali che la classe di $G(\mathbb{F}_q)$-coniugio di un toro $\mathbb{F}_q$-split massimale in G_x corrisponda a quella di T (in questo caso diciamo che x *massimizza* T).

$d(T,V)$ è ben definito in quanto gli stabilizzatori G_y sono tutti $G(\mathbb{F}_q)$-coniugati al variare di $y \in G(\mathbb{F}_q)\cdot x$, così come i tori $\mathbb{F}_q$-split massimali in G_x sono $G(\mathbb{F}_q)$-coniugati tra loro ([Bor91], Cap. XX).

Lemma 3.2.3. *Riprendendo la notazione della precedente definizione, e supponendo l'azione di G fedele, sia T un toro $\mathbb{F}_q$-split di G. Allora $d(T,V) = d(T,V^*)$.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $\dim V$. Il caso base in dimensione 0 è banale, assumiamo quindi l'ipotesi induttiva. Denotiamo con $W = N_G(T)/T$, $\mathfrak{c} = V^T$, $\mathfrak{c}' = (V^*)^T$ (si noti che tutti questi oggetti sono definiti su $\mathbb{F}_q$). Chiaramente se $x \in V(\mathbb{F}_q)$ (risp. $V^*(\mathbb{F}_q)$) massimizza T allora esiste un punto $y \in G(\mathbb{F}_q)\cdot x \cap \mathfrak{c}$ (risp. $y \in G(\mathbb{F}_q)\cdot x \cap \mathfrak{c}'$).

Supponiamo in un primo momento T non banale. Si vede subito che $\mathfrak{c}$ e $\mathfrak{c}'$ sono sottospazi stretti (l'azione è fedele) e che sono $N_G(T)$-invarianti. Poiché inoltre T agisce banalmente su entrambi, viene indotta un'azione di W definita su $\mathbb{F}_q$.

Mostriamo che $x \in \mathfrak{c}(\mathbb{F}_q)$ (o $\mathfrak{c}'(\mathbb{F}_q)$) è $\mathbb{F}_q$-quasilibero rispetto a W se e solo se T è un toro split massimale in G_x. In effetti se $S \subset G_x$ è un toro split contenente strettamente T, S/T è un toro split non banale di W (per il lemma (1.1.5)). Viceversa se esiste un toro split non banale $S \subset W$, Detta N' la sua preimmagine tramite $N_G(T) \to W$ si ha la successione esatta (definita su $\mathbb{F}_q$) $1 \to T \to N' \to S \to 1$, che per il lemma (1.1.6) ci permette di dire che N' è un toro split non banale.

Ora, presi x, y punti quasiliberi in $\mathfrak{c}(\mathbb{F}_q)$ (o $\mathfrak{c}'(\mathbb{F}_q)$) rispetto a W, tali che $y = g\cdot x$ per qualche $g \in G(\mathbb{F}_q)$, si ha che stanno nella stessa orbita anche tramite $N_G(T)(\mathbb{F}_q)$ (e quindi tramite $W(\mathbb{F}_q)$). Infatti T e gTg^{-1} sono tori $\mathbb{F}_q$-split massimali in G_y, quindi sono coniugati tramite $g_1 \in G_y(\mathbb{F}_q)$. Di conseguenza $g_1 g$ è un elemento di $N_G(T)(\mathbb{F}_q)$ che manda x in y.

Abbiamo quindi stabilito che le orbite di punti in $\mathfrak{c}(\mathbb{F}_q)$ (o $\mathfrak{c}'(\mathbb{F}_q)$), $\mathbb{F}_q$-quasiliberi rispetto a W, corrispondono alle orbite di punti x che massimizzano T, quindi sono in numero $d(T,V)$ e $d(T,V^*)$ rispettivamente. Affermiamo che $\mathfrak{c}$ e $\mathfrak{c}'$ sono duali una dell'altra come rappresentazioni di $N_G(T)$, quindi di W. In effetti, per un discorso identico a quello fatto in (1.1.6), $N_G(T)$ centralizza T, quindi vedendo V e V^* come T-rappresentazioni, possiamo scomporle in componenti isotipiche $N_G(T)$-invarianti

$$V = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}^n} R_m \quad V^* = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}^n} S_m,$$

dove $S_m = (R_{-m})^*$. Da qui segue immediatamente che $\mathfrak{c} = R_0$ e $\mathfrak{c}' = S_0$ sono duali una dell'altra. Essendo $\dim \mathfrak{c} < \dim V$ concludiamo applicando l'ipotesi induttiva per il toro banale.

Per concludere il passo induttivo occorre analizzare infine il caso $T = \{e\}$. Calcoliamo $d(e, V)$ per differenza: esso è uguale al numero di orbite di $G(\mathbb{F}_q)$ su $V(\mathbb{F}_q)$ meno $\sum d(S, V)$, dove la somma è fatta al variare delle classi di $G(\mathbb{F}_q)$-coniugio di tori $\mathbb{F}_q$-split non banali. Per quanto appena dimostrato e per il lemma (3.2.1) tutto ciò è uguale a $d(e, V^*)$. □

Si noti l'importanza di questo lemma applicato al caso del toro banale: ci sta dicendo che le $G(\mathbb{F}_q)$-orbite di punti $\mathbb{F}_q$-quasiliberi in $V(\mathbb{F}_q)$ e $V^*(\mathbb{F}_q)$ sono le stesse in numero. Questo è per noi di grande interesse nel caso dell'azione di G^α sullo spazio $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \overline{\mathbb{F}}_q)$: per il lemma (2.3.4) le $G^\alpha(\mathbb{F}_q)$-orbite $\mathbb{F}_q$-quasilibere corrispondono alle rappresentazioni indecomponibili a meno di isomorfismo.

Ci serve un ultimo piccolo raffinamento:

Lemma 3.2.4. *Siano V_1, V_2 rappresentazioni finite di G, definite su $\mathbb{F}_q$. Allora $d(T, V_1 \oplus V_2) = d(T, V_1 \oplus V_2^*)$.*

Dimostrazione. Dato $x \in V_1$ sia d_x la funzione definita come d, ma con G_x al posto di G. Consideriamo un sistema di rappresentanti per le orbite su $V_1(\mathbb{F}_q) \oplus V_2(\mathbb{F}_q)$

$$P = \{(x_i, y_{ij}) \in V_1(\mathbb{F}_q) \oplus V_2(\mathbb{F}_q) : \ j \leq a_i \in \mathbb{Z}_{>0}, \ i \leq k\}$$

costruito così: $R = \{x_1, \ldots, x_k\}$ sono rappresentanti delle $G(\mathbb{F}_q)$-orbite su $V_1(\mathbb{F}_q)$, mentre $\{y_{i,1}, \ldots, y_{i,a_i}\}$ sono rappresentanti delle orbite di $G_{x_i}(\mathbb{F}_q)$ su $V_2(\mathbb{F}_q)$. È chiaro che questo sia un sistema completo di rappresentanti. Calcolare $d(T, V_1 \oplus V_2)$ equivale a contare quanti di questi punti massimizzano T. Chiaramente è necessario che la prima coordinata stia nell'insieme S degli $x \in V_1$ tali che G_x contiene $g_x T g_x^{-1}$ per un qualche $g_x \in G(\mathbb{F}_q)$. Poiché $G_{(a,b)} = (G_a)_b$, fissando $x_i \in S \cap R$ si ha che (x_i, y_{ij}) massimizza T in G se e solo se y_{ij} massimizza T in G_{x_i}. Quindi

$$d(T, V_1 \oplus V_2) = \sum_{x \in S \cap R} d_x(g_x T g_x^{-1}, V_2) \overset{(3.2.3)}{=} \sum_{x \in S \cap R} d_x(g_x T g_x^{-1}, V_2^*) = d(T, V_1 \oplus V_2^*)$$

□

Possiamo finalmente dire che $\mathcal{I}^\alpha(S, O, q)$, cioè $d(\{e\}, \mathfrak{m}^\alpha(S, O, \overline{\mathbb{F}}_q))$, non dipende dall'orientazione O: capovolgere un arco equivale a fare un duale in uno degli addendi della somma diretta

$$\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \overline{\mathbb{F}}_q) = \bigoplus_{h: \ i \to j} V_i^* \otimes V_j.$$

Adesso siamo pronti per affermare i seguenti importanti risultati su campo finito.

Teorema 3.2.5. *Sia (S, O) un quiver, $\alpha \in \Gamma_+$, e sia $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ ($q = p^t$) un campo finito. Valgono i seguenti fatti:*

a) $\mathcal{I}^\alpha(S,O,q)$ *non dipende da* O*. Se è non nullo e* $\alpha \neq \boldsymbol{\varepsilon}_i$*, con* i *senza loop, allora* $s_i(\alpha) \in \Gamma_+$ *e* $\mathcal{I}^\alpha(S,q) = \mathcal{I}^{s_i(\alpha)}(S,q)$*.*

b) Se $\alpha \notin \Delta_+$ *tutte le rappresentazioni di dimensione* α *sono decomponibili.*

c) Se $\alpha \in \Delta_+^{re}$ *esiste un'unica rappresentazione indecomponibile di dimensione* α*.*

Dimostrazione. La prima parte del punto a) è già stata fatta. Adesso possiamo quindi invertire gli archi in modo che il vertice i diventi una sorgente di (S,O'); poiché esiste una rappresentazione indecomponibile di (S,O') (e $\alpha \neq \boldsymbol{\varepsilon}_i$) il funtore di riflessione manda α in $s_i(\alpha) \in \Gamma_+$ (osservazione (2.5.6)) e ci permette di dire che $\mathcal{I}^\alpha(S,q) = \mathcal{I}^{s_i(\alpha)}(S,q)$.

Veniamo al punto b). Supponiamo che $\alpha \notin \Delta_+^{re}$ sia tale che $\mathcal{I}(S,q) > 0$. Usando ripetutamente il punto a) si ottiene che $w(\alpha) \in \Gamma_+$ e $\mathcal{I}^{w(\alpha)}(S,q) = \mathcal{I}^\alpha(S,q) \neq 0 \ \ \forall\, w \in W$. Preso $\beta = \sum_i k_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \in W \cdot \alpha$ di altezza minima si ha chiaramente che $(\beta, \boldsymbol{\varepsilon}_i) \leq 0 \ \ \forall\, i$: in caso contrario $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ sarebbe radice semplice, e applicando s_i contraddiremmo la minimalità di β. Inoltre il supporto di β è connesso altrimenti ovviamente $\mathcal{I}^\beta(S,q) = 0$. Segue che $\beta \in M \Rightarrow \alpha \in \Delta_+^{im}$, e questo conclude.

Per il punto c) ci basta notare che per definizione di Δ_+^{re} esiste un elemento $w = s_{i_l} s_{i_{l-1}} \cdots s_{i_1} \in W$ con $l \geq 0$ minimo tale che $w(\boldsymbol{\varepsilon}_k) = \alpha$, per un qualche $\boldsymbol{\varepsilon}_k \in \Pi$ radice semplice. Se $i_1 \neq k$, per il punto a) si avrebbe $\mathcal{I}^{\boldsymbol{\varepsilon}_k}(S,q) = \mathcal{I}^{s_{i_1}(\alpha)}(S,q) = 1$. A questo punto potremmo applicare più volte il punto a) per arrivare a $\mathcal{I}^{\boldsymbol{\varepsilon}_i}(S,q) = \mathcal{I}^\alpha(S,q) = 1$ sfruttando il fatto che $s_{i_r} s_{i_{r-1}} \cdots s_1(\boldsymbol{\varepsilon}_k) \notin \Pi \ \ \forall\, 2 \leq l$, per minimalità di w. Supponiamo per assurdo che $i_1 = k$, quindi che $s_{i_1}(\boldsymbol{\varepsilon}_k) = -\boldsymbol{\varepsilon}_k \in \Delta_-^{re}$. Osserviamo che vale la seguente ovvia modifica di quanto mostrato nel punto a):

a') Sia $\alpha \in \Gamma_-$ e $\mathcal{I}^{-\alpha}(S,O,q) \neq 0$. Se $\alpha \neq -\boldsymbol{\varepsilon}_i$, con i senza loop, allora $s_i(\alpha) \in \Gamma_-$.

Ma allora, detto $r \geq 2$ il minimo indice tale che $s_{i_r} s_{i_{r-1}} \cdots s_{i_1}(\boldsymbol{\varepsilon}_i) \in \Gamma_+$, si dovrà necessariamente avere che $s_{i_{r-1}} s_{i_{r-2}} \cdots s_{i_1}(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = -\boldsymbol{\varepsilon}_{i_r}$ e $s_{i_r} s_{i_{r-1}} \cdots s_{i_1}(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = \boldsymbol{\varepsilon}_{i_r}$: il punto a') ci dice infatti che questo è l'unico modo per uscire Γ_-. Questo contraddice la minimalità di l.

□

3.3 Teoremi di non esistenza su $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$

Teorema 3.3.1. *Sia* (S,O) *un quiver. Fissiamo un campo base* $\mathbb{F}$ *algebricamente chiuso.*

Ogni rappresentazione di (S,O) *di dimensione* $\alpha \in \Gamma_+ \setminus \Delta_+$ *è decomponibile.*

Dimostrazione. Supponiamo $\alpha \in \Gamma_+ \setminus \Delta_+$. Si consideri una rappresentazione $U = (\phi_h)_{h \in \Omega}$ in $\mathfrak{m}^\alpha(S,O,\mathbb{F})$. Sia k il campo semplice su cui è definito $\mathbb{F}$. Sia $\mathbb{F}_0$ il campo finitamente generato su k da tutte le entrate delle ϕ_h viste come matrici. Possiamo scrivere $\mathbb{F}_0 = k(\xi_1, \ldots, \xi_h)(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ con le ξ_i algebricamente indipendenti su k e i γ_i algebrici su $k(\xi_1, \ldots, \xi_h)$, che generano $\mathbb{F}_0$ come $k(\xi_1, \ldots, \xi_h)$-spazio vettoriale. Se $k = \mathbb{F}_p$ (risp.

$k = \mathbb{Q}$) sia $A = k[\xi_1, \ldots, \xi_h][\gamma_1, \ldots, \gamma_r]$ (risp. $A = \mathbb{Z}[\xi_1, \ldots, \xi_h][\gamma_1, \ldots, \gamma_r]$). Sia P il kernel (ideale primo) dell'omomorfismo di valutazione

$$\begin{aligned} \overline{k}[x_1, \ldots, x_{h+r}] &\to \overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_h][\gamma_1, \ldots, \gamma_r] \\ x_i &\mapsto \xi_i \quad \forall\ i \leq h \\ x_j &\mapsto \eta_j \quad \forall\ j > h \end{aligned}$$

Preso un sottoanello qualsiasi $R \subset \overline{k}$, definiamo $P_R := P \cap R[x_1, \ldots, x_{h+r}]$. Chiaramente, se $k = \mathbb{F}_p$ si ha $k[x_1, \ldots, x_{h+r}]/P_k \simeq A$, mentre $k[x_1, \ldots, x_{h+r}]/P_{\mathbb{Z}} \simeq A$ nel caso in cui $k = \mathbb{Q}$.

Mostrare che U è decomponibile è equivalente a esibire un qualche suo endomorfismo $(P_i)_{i \in I}$ che sia una proiezione non banale su un suo sottospazio, ovvero una soluzione su $\mathbb{F}$ del sistema di equazioni

$$X_{t(h)}\phi_h = \phi_h X_{s(h)} \quad \forall\ h \in \Omega, \qquad\qquad X_i^2 = X_i \quad \forall\ i \in I \tag{3.2}$$

che non sia una delle due banali $(0, \ldots, 0)$ e $(\mathrm{Id}, \ldots, \mathrm{Id})$. Le X_i sono matrici di dimensione α_i con una indeterminata distinta in ogni entrata (indichiamo con $\mathbf{X}$ il vettore di tutte queste indeterminate). Poiché siamo su campo algebricamente chiuso, ci basta far vedere che l'ideale J di $\mathbb{F}[\mathbf{X}]$ dato dalle equazioni (3.2) non contiene (i.e. è diverso da) l'ideale H associato al chiuso composto dai soli due punti $(0, \ldots, 0)$ e $(\mathrm{Id}, \ldots, \mathrm{Id})$. Sia $a \neq 0$ un elemento di A tale che le entrate di tutte le matrici ϕ_h moltiplicate per a vadano in A. Detti $\widetilde{H} = H \cap A_a$ e $\widetilde{J} = J \cap A_a$, basta provare che $\widetilde{H} \not\subset \widetilde{J}$.

Caso 1: $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = p$. Mostriamo che esiste un omomorfismo f (di k-algebre) di specializzazione da $A \simeq k[x_1, \ldots, x_{h+r}]/P_k$ in $\overline{k}$ che non mandi a in 0. Detta $\overline{a}$ una preimmagine di a tramite $\pi : k[x_1, \ldots, x_{h+r}] \to A$, basta trovare un omomorfismo di specializzazione di $\overline{k}$-algebre $\overline{f} : \overline{k}[x_1, \ldots, x_{h+r}] \to \overline{k}$ tale che $\overline{f}(P) = 0$ e $\overline{f}(\overline{a}) \neq 0$. Questo è immediato considerato che $\overline{a} \notin P$ e che quindi esiste un punto $(\beta_1, \ldots, \beta_h, \eta_1, \ldots, \eta_r)$ in $\mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}((\overline{a}))$. In conclusione, la f ottenuta valutando $\xi_i \mapsto \beta_i \in \overline{k}$ e $\gamma_j \mapsto \eta_j \in \overline{k}$ è ben definita e fa al caso nostro.

In realtà f ha immagine in un qualche campo finito $\mathbb{F}_q$, considerato che il dominio, e quindi l'immagine, sono finitamente generati. Poiché $f(a) \neq 0$, sia f_a ottenuta localizzando A rispetto ad a. f_a può anche essere vista come una mappa suriettiva $A_a[\mathbf{X}] \to \mathbb{F}_q[\mathbf{X}]$ che specializza i coefficienti, o anche come una mappa dalle rappresentazioni definite su A_a (come U) in quelle definite su $\mathbb{F}_q$ (si applica alle matrici coefficiente per coefficiente). $\widetilde{H}$ è definito da equazioni a coefficienti in $k \subset \overline{k}$ quindi la sua immagine tramite f_a resta l'ideale associato al chiuso $\{(0, \ldots, 0); (\mathrm{Id}, \ldots, \mathrm{Id})\}$ (anche se la varietà ha cambiato campo di definizione). Se per assurdo $\widetilde{H} \subset \widetilde{J}$ allora $f_a(\widetilde{H}) \subset f_a(\widetilde{J})$, che significa affermare che la rappresentazione di (S, O) di dimensione α, a coefficienti in $\mathbb{F}_q$, data da $(f_a(\phi_h))_{h \in \Omega}$ è indecomponibile su $\overline{k}$ (quindi su $\mathbb{F}_q$). Questo è assurdo in quanto contraddice il teorema (3.2.5).

Caso 2: $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$.

Sia $p \in \mathbb{N}$ un primo tale che a non sia divisore di 0 in $A/(p)$ (dove (p) è l'ideale generato in A).

Definiamo adesso $\widetilde{A}$ ottenuto quozientando A per (p). Fissiamo poi Q un ideale primo di $\widetilde{A}_a$ - anello non banale in quanto a non è divisore di 0 - e sia L il campo delle frazioni del dominio $\frac{\widetilde{A}_a}{Q}$, con chiusura algebrica $\overline{L}$ (si noti che $\operatorname{char} L \neq 0$). Abbiamo quindi una sequenza di omomorfismi

$$A \to \widetilde{A} \to \widetilde{A}_a \to \frac{\widetilde{A}_a}{P} \to L \to \overline{L}$$

la cui composizione la chiamiamo f. Per costruzione $f(a) \neq 0$, quindi sia $f_a : A_a \to \overline{L}$ la localizzazione rispetto ad a, che può essere vista anche come mappa da $A_a[\mathbf{X}]$ in $\overline{L}[\mathbf{X}]$, o anche come mappa dalle rappresentazioni definite su A_a (come U) in quelle su $\overline{L}$.
$\widetilde{H}$ è generato da polinomi a coefficienti in $\{0, 1\}$ quindi l'ideale generato da $f(\widetilde{H})$ continua ad essere l'ideale associato al chiuso $\{(0, \dots, 0); (\mathrm{Id}, \dots, \mathrm{Id})\}$ (anche se la varietà ha cambiato campo di definizione). Se per assurdo $\widetilde{H} \subset \widetilde{J}$ allora varrebbe il contenimento anche tra gli ideali immagine $(f_a(\widetilde{H})) \subset (f_a(\widetilde{J}))$ il che è impossibile poiché comporterebbe l'indecomponibilità della rappresentazione $(f_a(\phi_h))_{h\in\Omega}$ su $\overline{L}$, in contraddizione con quanto dimostrato nel caso precedente.

□

Concludiamo questa sezione concentrandoci sulle rappresentazioni di dimensione radice positiva reale.

Teorema 3.3.2. *Sia (S, O) un quiver, $\mathbb{F}$ un campo algebricamente chiuso e $\alpha \in \Delta_+^{re}$. Allora esiste al più una rappresentazione indecomponibile di dimensione α su $\mathbb{F}$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo di avere due rappresentazioni su $\mathbb{F}$ di (S, O), indecomponibili e non isomorfe, chiamiamole $(\phi_h)_{h\in\Omega}$ e $(\psi_h)_{h\in\Omega}$. Indichiamo con k il campo semplice sotto $\mathbb{F}$ e con $\mathbb{F}_0$ l'estensione di k generata dalle entrate delle ϕ_h e delle ψ_h viste come matrici. Possiamo esprimere $\mathbb{F}_0$ nella forma $k(\xi_1, \dots, \xi_h)(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ con gli ξ_i algebricamente indipendenti su k e i γ_i che generano $\mathbb{F}_0$ come $k(\xi_1, \dots, \xi_h)$-spazio vettoriale. Se $\operatorname{char}\mathbb{F} = p$ (risp. $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$) sia $A = k[\xi_1, \dots, \xi_h][\alpha_1, \dots, \alpha_r]$ (risp. $A = \mathbb{Z}[\xi_1, \dots, \xi_h][\alpha_1, \dots, \alpha_r]$). Per costruzione $\mathbb{F}_0$ è il campo delle frazioni di A.

Le tre condizioni "(ϕ_h) e (ψ_h) sono indecomponibili e non isomorfe" sono equivalenti a dire che nessuno dei tre sistemi di equazioni matriciali seguenti ha soluzione in $\mathbb{F}$:

$$\begin{aligned}
X_{t(h)}\phi_h = \phi_h X_{s(h)} \quad \forall\, h \in \Omega, \qquad & X_i^2 = X_i \quad \forall\, i \in I \\
Y_{t(h)}\phi_h = \phi_h Y_{s(h)} \quad \forall\, h \in \Omega, \qquad & Y_i^2 = X_i \quad \forall\, i \in I \\
Z_{t(h)}\phi_h = \psi_h Z_{s(h)}, \quad \widetilde{Z}_{t(h)}\psi_h = \phi_h \widetilde{Z}_{s(h)} \quad \forall\, h \in \Omega \qquad & Z_i\widetilde{Z}_i = \mathrm{Id}_{V_i} \quad \forall\, i \in I
\end{aligned}$$

con $(X_i)_{i\in I}, (Y_i)_{i\in I}$ diverse da $(0,\dots 0)$ e $(\mathrm{Id},\dots,\mathrm{Id})$ (le X_i, le Y_i, le Z_i e le $\widetilde{Z}_i$ sono matrici con una indeterminata distinta per ogni entrata). Questo è equivalente a dire che

$$H \subset I_1,\ H \subset I_2,\ 1 \in I_3, \tag{3.3}$$

dove denotiamo con I_1, I_2, I_3 gli ideali generati dal primo, dal secondo e dal terzo blocco di equazioni nei rispettivi anelli di coordinate, e H è l'ideale associato al chiuso composto dai due soli punti $(0,\dots,0)$ e $(\mathrm{Id},\dots,\mathrm{Id})$. Adesso dovremmo avere capito come ragionare in questi casi: sia $a \neq 0$ un elemento di A tale che le entrate di tutte le matrici ϕ_h e ψ_h moltiplicate per a vadano in A. Indichiamo con $\widetilde{I}_1,\ \widetilde{I}_2,\ \widetilde{I}_3,\ \widetilde{H}$ le rispettive intersezioni di I_1, I_2, I_3, H con A_a. Allora si avrà chiaramente che $\widetilde{H} \subset \widetilde{I}_1,\ \widetilde{H} \subset \widetilde{I}_2,\ 1 \in \widetilde{I}_3$.

Caso 1: $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = p$.

Come nel caso 1 del teorema (3.3.1), possiamo costruire un omomorfismo f_a di specializzazione da A_a in $\mathbb{F}_q$ con $f_a(\widetilde{H})$ che continua ad essere l'ideale associato alla coppia di punti $\{(0,\dots,0),(\mathrm{Id},\dots,\mathrm{Id})\}$. Ma ora le condizioni (3.3) mi dicono che $f_a(\widetilde{H}) \subset f_a(\widetilde{I}_2),\ f_a(\widetilde{H}) \subset f_a(\widetilde{I}_2),\ 1 \in f_a(\widetilde{I}_3)$. Questo significa affermare che le due rappresentazioni $(f_a(\phi_h))_{h\in\Omega}$ e $(f_a(\psi_h))_{h\in\Omega}$ definite su $\mathbb{F}_q$ sono indecomponibili e non isomorfe (in $\overline{\mathbb{F}}_p$, quindi a maggior ragione in $\mathbb{F}_q$), in contraddizione con il punto c) del teorema (3.2.5).

Caso 2: $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 0$.

Come nel caso 2 del teorema (3.3.1), per un primo p opportuno possiamo costruire un omomorfismo $f_a : A_a \to \overline{L}$ con L campo di caratteristica p, con $f_a(\widetilde{H})$ che continua ad essere l'ideale associato alla coppia di punti $\{(0,\dots,0),(\mathrm{Id},\dots,\mathrm{Id})\}$. Ma allora, come prima, $f_a(\widetilde{H}) \subset f_a(\widetilde{I}_2),\ f_a(\widetilde{H}) \subset f_a(\widetilde{I}_2),\ 1 \in f_a(\widetilde{I}_3)$, il che significa affermare che $(f_a(\phi_h))_{h\in\Omega}$ e $(f_a(\psi_h))_{h\in\Omega}$ sono rappresentazioni su $\overline{L}$ indecomponibili e non isomorfe, in contraddizione con quanto mostrato nel caso precedente.

□

3.4 Il caso $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}_p$

Sia G un gruppo lineare algebrico connesso che agisce su una varietà algebrica affine X, dove G, X e l'azione sono definiti su $\mathbb{F}_q$. Sia

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr} : \overline{\mathbb{F}}_q &\longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_q \\ x &\longmapsto x^q \end{aligned}$$

l'automorfismo di Frobenius. Sappiamo che questo agisce (non per forza algebricamente) anche sui punti di X e G, tenendo fissi tutti e soli gli $\mathbb{F}_q$-punti. Sappiamo inoltre che l'azione del Frobenius sui punti commuta con gli $\mathbb{F}_q$-morfismi di $\mathbb{F}_q$-varietà. Nello specifico $\mathrm{Fr}(gh) = \mathrm{Fr}(g)\,\mathrm{Fr}(h)\ \ \forall\ g,h \in G$ e $\mathrm{Fr}(g\cdot x) = \mathrm{Fr}(g)\cdot\mathrm{Fr}(x)\ \ \forall\ x \in X,\ g \in G$, quindi

il Frobenius manda G-orbite in G-orbite. In altre parole l'azione del gruppo di Galois sui punti di X ne induce una sull'insieme delle G-orbite. Non si faccia quindi troppa confusione quando in seguito parleremo di "orbite di G-orbite".

Definizione 3.4.1. Diciamo che $x \in X$ *ha un rappresentante* su $\mathbb{F}_q$ se $G \cdot x$ contiene un punto in $X(\mathbb{F}_q)$.

Prima di proseguire ricordiamo il teorema di Lang.

Teorema 3.4.2. *Se G è un gruppo algebrico connesso definito su $\mathbb{F}_q$ allora la mappa $g \mapsto g^{-1}\operatorname{Fr}(g)$ è surgettiva, o equivalentemente (a meno di scambiare G con G^{op}) è surgettiva la mappa $g \mapsto \operatorname{Fr}(g)g^{-1}$.*

Grazie a questo seguono facilmente una serie di osservazioni:

Proposizione 3.4.3. *Un punto $x \in X$ ha un rappresentante su $\mathbb{F}_q$ se e solo se $\operatorname{Fr}(G \cdot x) = G \cdot x$.*

Dimostrazione. Chiaramente se $x = g \cdot y$ con $y \in X(\mathbb{F}_q)$ allora la sua orbita rimane fissa, in quanto $\operatorname{Fr}(y) = y$. Viceversa, supponiamo che $\operatorname{Fr}(x) = g \cdot x$ (cioè che l'orbita di x sia Fr-invariante). Cerchiamo $h \in G$ tale che $h \cdot x \in X(\mathbb{F}_q)$, cioè tale che $\operatorname{Fr}(h \cdot x) = h \cdot x$. Ma $\operatorname{Fr}(h \cdot x) = \operatorname{Fr}(h)g \cdot x$, e per Lang possiamo scegliere h tale che $\operatorname{Fr}(h)^{-1}h = g$. Questo conclude. □

Proposizione 3.4.4. *Siano $x, y \in X(\mathbb{F}_q)$, con G_x connesso. Allora $y \in G \cdot x$ se e solo se $y \in G(\mathbb{F}_q) \cdot x$.*

Dimostrazione. Un'implicazione è banale. Supponiamo adesso che $y = g \cdot x$ per qualche $g \in G$. Allora $g \cdot x = y = \operatorname{Fr}(y) = \operatorname{Fr}(g \cdot x) = \operatorname{Fr}(g) \cdot x$, ovvero $\operatorname{Fr}(g)^{-1}g \in G_x$. Ma allora per Lang applicato allo stabilizzatore esiste $h \in G_x$ tale che $\operatorname{Fr}(h)h^{-1} = \operatorname{Fr}(g)^{-1}g$, ovvero tale che $gh \in G(\mathbb{F}_q)$, e questo conclude poiché $gh \cdot x = y$. □

Osservazione 3.4.5. *Nel caso che interessa a noi, ovvero $G = G^\alpha$ e $X = \mathfrak{m}^\alpha(S, O, \overline{\mathbb{F}}_q)$ possiamo applicare le proposizioni appena dimostrate: l'ipotesi di G^α connesso è chiaramente verificata, infatti è quoziente di $\operatorname{GL}(\alpha)$, che è irriducibile perché aperto di uno spazio vettoriale. Presa $x \in \mathfrak{m}^\alpha(S, O, \overline{\mathbb{F}}_q)$ rappresentazione qualsiasi, anche G_x sarà connesso in quanto isomorfo a un quoziente di $\operatorname{Aut}(x)$, e quest'ultimo è irriducibile perché aperto dello spazio vettoriale $\operatorname{End}(x)$.*

Denotiamo adesso con $\mathcal{A}^\alpha(S, O, q)$ il numero di classi di isomorfismo di rappresentazioni su $\mathbb{F}_q$, assolutamente indecomponibili, di dimensione $\alpha \in \Gamma_+$. Il nostro prossimo obiettivo è dimostrare che questo numero non dipende dall'orientazione O.

Definizione 3.4.6. Sia $x \in \mathfrak{m}^\alpha(S, O, \overline{\mathbb{F}}_p)$. Allora un campo in $\mathbb{F} \subseteq \overline{\mathbb{F}}_p$ è detto *campo minimo* di x se è minimo tra i campi su cui x ha un rappresentante.

Chiaramente se il campo minimo esiste allora è invariante per isomorfismo di x. Inoltre possiamo cercarlo in un'estensione finita di $\mathbb{F}_p$, in quanto è contenuto nell'estensione finitamente generata dalle entrate delle $(\phi_h)_{h\in\Omega}$ viste come matrici.

Proposizione 3.4.7. *Sia $x \in \mathfrak{m}^\alpha(S, O, \overline{\mathbb{F}}_p)$. Allora il suo campo minimo esiste ed è il campo fissato da $H \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ definito nel seguente modo:*

$$H = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) : \ \sigma(G^\alpha \cdot x) = G^\alpha \cdot x\}.$$

Dimostrazione. È un'immediata conseguenza della proposizione (3.4.3). □

Proposizione 3.4.8. *$\mathbb{F}_{p^t}$ è il campo minimo di x se e solo se l'orbita di $(G^\alpha \cdot x)$, tramite l'azione di $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{F}_p)$ sulle G^α-orbite, ha t elementi.*

Dimostrazione. Supponiamo $\mathbb{F}_{p^t}$ sia campo minimo. Grazie alla proposizione (3.4.3) si ha che $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{F}_{p^t})$ agisce banalmente su $(G^\alpha \cdot x)$. Inoltre il kernel dell'azione sull'orbita di $(G^\alpha \cdot x)$ consiste negli elementi $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{F}_p)$ tali che $\sigma(x) \simeq x$ che, per definizione di campo minimo, sono tutti in $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{F}_{p^t})$, e quindi hanno immagine banale in $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^t}, \mathbb{F}_p)$. Di conseguenza l'azione indotta di quest'ultimo sull'orbita di $(G^\alpha \cdot x)$ è fedele.

L'implicazione opposta adesso è banale in quanto se x avesse campo minimo $\mathbb{F}_{p^s}$ con $s \neq t$ allora l'orbita di $(G^\alpha \cdot x)$ avrebbe s elementi. □

Denotiamo con $\widetilde{\mathcal{A}}^\alpha(S, O, p^t)$ il numero di assolutamente indecomponibili a meno di isomorfismo in $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \overline{\mathbb{F}}_p)$ che hanno $\mathbb{F}_{p^t}$ come campo minimo. Con $\widetilde{\mathcal{I}}^\alpha(S, O, p^t)$ indichiamo invece il numero di $\mathbb{F}_{p^t}$-indecomponibili a meno di isomorfismo, che hanno $\mathbb{F}_{p^t}$ come campo minimo.

Scriviamo α nella forma $c\beta$ con $\beta \in \Gamma_+$ non divisibile e $c \in \mathbb{Z}_{>0}$. Una semplice osservazione che segue direttamente dalle definizioni è la seguente:

$$\mathcal{A}^\alpha(S, O, p^t) = \sum_{d|t} \widetilde{\mathcal{A}}^\alpha(S, O, p^d),$$
$$\mathcal{I}^\alpha(S, p^t) = \sum_{d|t} \widetilde{\mathcal{I}}^\alpha(S, O, p^d).$$

La prima uguaglianza ci dice che se $\widetilde{\mathcal{A}}^\alpha$ non dipende dall'orientazione allora neanche $\mathcal{A}^\alpha$ può dipendere. Tramite inversione di Moebius si ottiene

$$\widetilde{\mathcal{I}}^\alpha(S, O, p^t) = \sum_{d|t} \mathcal{I}^\alpha(S, p^d)\mu\left(\frac{t}{d}\right). \tag{3.4}$$

Questo significa che $\widetilde{\mathcal{I}}^\alpha$ non dipende dall'orientazione. Ciò che manca da fare adesso è trovare una qualche relazione che esprima $\widetilde{\mathcal{A}}$ in funzione di $\widetilde{\mathcal{I}}$. Se ci riusciamo potremo dire che né $\widetilde{\mathcal{A}}^\alpha$, né $\mathcal{A}^\alpha$ dipendono da O.

Proposizione 3.4.9. *Siano $x, y \in \mathfrak{m}^\alpha(S, O, \overline{\mathbb{F}}_p)$ assolutamente indecomponibili con campo minimo $\mathbb{F}_{q^s}$, dove $q = p^t$. Allora detto $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\} = \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_q)$ valgono i seguenti fatti:*

a) $x' = \sigma_1(x) \oplus \sigma_2(x) \oplus \cdots \oplus \sigma_s(x)$ ha un rappresentante su $\mathbb{F}_q$.

b) Tutti i $\sigma_i(x)$ sono a due a due non isomorfi.

c) x' è $\mathbb{F}_q$-indecomponibile, e ha $\mathbb{F}_q$ come campo minimo.

d) $x' \simeq y'$ se e solo se esiste $\sigma \in \Sigma$ tale che $y \simeq \sigma(x)$.

Dimostrazione. Il punto a) è una facile conseguenza della proposizione (3.4.3), infatti per costruzione $\sigma(x') \simeq x' \quad \forall\ \sigma \in \Sigma$ quindi x ha un rappresentante su $\mathbb{F}_q$. Il punto b) è una diretta conseguenza della proposizione (3.4.8). Riguardo al punto c), supponiamo per assurdo che $a \oplus b \simeq x'$ con a e b definite su $\mathbb{F}_q$. Ma allora per Krull-Schmidt esiste un insieme di indici non vuoto $S \subsetneq \{1, \dots, s\}$ tale che $a \simeq \bigoplus_{i \in S} \sigma_i(x)$ e $b \simeq \bigoplus_{i \in S^c} \sigma_i(x)$. Questo è impossibile perché vorrebbe dire che $\sigma(a) \simeq a \quad \forall\ \sigma \in \Sigma$, ma l'azione di Σ su $\{\sigma_i(x)\}_{i \le s}$ è transitiva quindi a ammetterebbe decomposizioni in indecomponibili distinte da quella scritta sopra. Il campo minimo di x' non può essere più piccolo di $\mathbb{F}_q$, infatti per il punto b) applicato al caso $q = p$ si ha che $\sigma(x) \not\simeq \sigma'(x) \quad \forall\ \sigma \neq \sigma' \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_p)$ e questo per Krull-Schmidt significa che tutti gli elementi di $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_p) \setminus \Sigma$ mandano x in una rappresentazione non isomorfa. Infine anche il punto d) è un'immediata conseguenza del teorema di Krull-Schmidt. □

Proposizione 3.4.10. *Sia $x \in \mathfrak{m}^\alpha(S, O, \overline{\mathbb{F}}_p)$ una rappresentazione con campo minimo $\mathbb{F}_q$ e $\mathbb{F}_q$-indecomponibile. Sia $x = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_s$ lo spezzamento in indecomponibili di x su $\overline{\mathbb{F}}_p$. Allora gli x_i formano un'unica orbita dell'azione di $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{F}_q)$, e il campo minimo di ciascuno di essi è $\mathbb{F}_{q^s}$.*

Dimostrazione. Per Krull-Schmidt, poiché $G^\alpha \cdot x$ è invariante tramite l'azione di $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{F}_q)$ ((3.4.3)), possiamo dire che l'insieme $\{x_1, \dots, x_s\}$ viene partizionato da tale azione in un certo numero di orbite, che non fuoriescono da esso. Ma non ci può essere più di un'orbita in quanto per la proposizione (3.4.4) ciascuna di esse dà luogo a un fattore della decomposizione di x definito su $\mathbb{F}_q$, il che contraddice l' $\mathbb{F}_q$-indecomponibilità. Ora $\mathbb{F}_{q^s}$ è campo minimo di ciascuno degli x_i per la proposizione (3.4.8). □

Queste due proposizioni messe insieme ci dicono che per ogni classe di isomorfismo $G^\alpha(\mathbb{F}_q) \cdot x$ di rappresentazioni $\mathbb{F}_q$-indecomponibili in $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F}_q)$ con campo minimo $\mathbb{F}_q$, esiste un unico $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ divisore di α e un'unica orbita di $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{F}_{q^d})$ fatta di d rappresentazioni (o meglio, composta da d $G^{\frac{\alpha}{d}}$-orbite di rappresentazioni) in $\mathfrak{m}^{\frac{\alpha}{d}}(S, O, \mathbb{F}_{q^d})$ associata ad esso, data dalla decomposizione in $\overline{\mathbb{F}}_p$-indecomponibili di x. Inoltre questa corrispondenza è una bigezione. Di conseguenza si ha che

$$\widetilde{\mathcal{I}}^{c\beta}(S, p^t) = \sum_{d|c} \frac{1}{d} \widetilde{\mathcal{A}}^{\frac{c\beta}{d}}(S, O, p^{dt}), \tag{3.5}$$

Adesso con una semplice induzione sull'altezza di α si può mostrare che $\widetilde{\mathcal{A}}^\alpha(S,O,p^t)$ è una funzione di $\widetilde{\mathcal{I}}$: supponiamo che tutti gli elementi di altezza minore di un certo $\gamma = k\gamma'$ (con γ' non divisibile) siano funzioni di $\widetilde{\mathcal{I}}$. Se poniamo $c = k,\ \beta = \gamma'$ in (3.5) e riarrangiamo i termini si ottiene

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{k\gamma'}(S,O,p^t) = \widetilde{\mathcal{I}}^{k\gamma'}(S,p^t) - \sum_{\substack{d|k \\ d\neq k}} \frac{1}{d}\widetilde{\mathcal{A}}^{\frac{k\gamma'}{d}}(S,O,p^{dt})$$

che per ipotesi induttiva è una funzione di $\widetilde{\mathcal{I}}$.

Proposizione 3.4.11. *$\mathcal{A}^\alpha(S,O,p^t)$ e $\widetilde{\mathcal{A}}^\alpha(S,O,p^t)$ non dipendono dall'orientazione O. Di conseguenza (nello stesso stile del punto a) del teorema* (3.2.5)*)*

$$\mathcal{A}^\alpha(S,q) = \mathcal{A}^{s_i(\alpha)}(S,q) \quad \forall\ i \in I \quad \textit{senza loop.}$$

Dimostrazione. È già stato tutto dimostrato. L'unica considerazione aggiuntiva da fare, per poter attuare un ragionamento uguale a quello del punto a) di (3.2.5), è che i funtori di riflessione mandano assolutamente indecomponibili in assolutamente indecomponibili. Ma questa è una banale osservazione, in quanto mandano somme dirette in somme dirette. □

Teorema 3.4.12. *Sia (S,O) un quiver, $\alpha \in \Gamma_+$ e sia $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}_p$.*

a) $\mathcal{I}^\alpha(S,O,\overline{\mathbb{F}}_p)$ non dipende da O. Se è non nullo e $\alpha \neq \boldsymbol{\varepsilon}_i$ con i senza loop, allora $s_i(\alpha) \in \Gamma_+$ e $\mathcal{I}^\alpha(S,\overline{\mathbb{F}}_p) = \mathcal{I}^{s_i(\alpha)}(S,\overline{\mathbb{F}}_p)$.

b) Per $\alpha \in \Delta_+^{im}$ si ha che $\mathcal{I}^\alpha(S,\overline{\mathbb{F}}_p) = \infty$.

c) Per $\alpha \in \Delta_+^{re}$ si ha che $\mathcal{I}^\alpha(S,\overline{\mathbb{F}}_p) = 1$, e la rappresentazione indecomponibile ha un rappresentante su $\mathbb{F}_p$.

Dimostrazione. Poiché ogni indecomponibile su $\overline{\mathbb{F}}_p$ ha un campo minimo, su cui è assolutamente indecomponibile, si ha $\mathcal{I}^\alpha(S,O,\overline{\mathbb{F}}_p) = \sum_{t\geq 1}\widetilde{\mathcal{A}}^\alpha(S,p^t)$, quindi non dipende dall'orientazione. La seconda parte del punto a) si fa nello stesso stile del punto a) del teorema (3.2.5). Anche i rispettivi punti c) sono analoghi; per mostrare che ha rappresentanti su $\mathbb{F}_p$ basta osservare che, preso $w = s_{i_l}s_{i_{l-1}}\cdots s_{i_1} \in W$ di lunghezza minima tale che $w(\boldsymbol{\varepsilon}_k) = \alpha$ per qualche $\boldsymbol{\varepsilon}_k \in \Pi$, si ha $\mathcal{A}^{\boldsymbol{\varepsilon}_k}(S,p) = \mathcal{A}^\alpha(S,p) = 1$ (si proceda come in (3.2.5)).

Riguardo al punto b), se $\alpha \in \Delta_+^{im}$ sia $w \in W$ nel gruppo di Weyl tale che $w(\alpha) \in M$. Ma $\mathcal{I}^{w(\alpha)}(S,O,\overline{\mathbb{F}}_p) = \mathcal{I}^\alpha(S,O,\overline{\mathbb{F}}_p)$ è infinito per il corollario (3.1.4), quindi per il punto a) $\mathcal{I}^{w(\alpha)}(S,\overline{\mathbb{F}}_p) = I^\alpha(S,\overline{\mathbb{F}}_p)$. □

Osservazione 3.4.13. *Grazie a questo teorema possiamo adesso affermare che $W(M) \subset \Gamma_+$, quindi nella definizione di Δ_+^{im} era superfluo intersecare con Γ_+.*

3.5 Teoremi di esistenza su $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$

Proposizione 3.5.1. *Sia $\mathbb{F}$ un campo algebricamente chiuso qualsiasi. Allora le rappresentazioni indecomponibili definite su $\mathbb{F}$ restano indecomponibili in una qualsiasi estensione $\mathbb{E} \supset \mathbb{F}$. Inoltre rappresentazioni non isomorfe su $\mathbb{F}$ restano non isomorfe su $\mathbb{E}$.*

Dimostrazione. Sia $x = (x_h : V_{s(h)} \longrightarrow V_{t(h)})_{h\in\Omega}$ una rappresentazione in $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$ indecomponibile. Supponiamo per assurdo che $x \simeq y \oplus z$ su $\mathbb{E}$, e chiamiamo $g = (g_i)_{i\in I} \in \mathrm{GL}(\alpha)(\mathbb{E})$ questo isomorfismo. Sia $\widetilde{\mathbb{F}}$ il campo finitamente generato su $\mathbb{F}$ dalle entrate delle y_h, delle z_h, delle g_i (le entrate delle g_i^{-1} stanno in questo campo). Possiamo scrivere $\widetilde{\mathbb{F}} = \mathbb{F}(\xi_1, \dots, \xi_h)(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ dove le ξ_i sono algebricamente indipendenti su $\mathbb{F}$ e i γ_i algebrici su $\mathbb{F}(\xi_1, \dots, \xi_h)$, che generano $\widetilde{\mathbb{F}}$ come $\mathbb{F}(\xi_1, \dots, \xi_h)$-spazio vettoriale. Sia $A = \mathbb{F}[\xi_1, \dots, \xi_h][\alpha_1, \dots, \alpha_r]$. Esso si ottiene quozientando $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_{h+r}]$ per un certo ideale primo P e ha campo delle frazioni $\widetilde{\mathbb{F}}$. Sia $a \neq 0$ un elemento di A tale che le entrate di tutte le matrici y_h, z_h, g_i e g_i^{-1} moltiplicate per a vadano in A. Mostriamo che esiste un omomorfismo f di specializzazione da A in $\mathbb{F}$ che non mandi a in 0: detta $\overline{a}$ una preimmagine di a tramite la proiezione $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_{h+r}] \to A$, basta trovare un omomorfismo di specializzazione $\overline{f} : \mathbb{F}[x_1, \dots, x_{h+r}] \to \mathbb{F}$ tale che $\overline{f}(P) = 0$ e $\overline{f}(\overline{a}) \neq 0$. Questo è immediato considerato che $\overline{a} \notin P$ e quindi esiste un punto $(\beta_1, \dots, \beta_h, \eta_1, \dots, \eta_r)$ in $\mathcal{V}(P) \setminus \mathcal{V}((a))$. In conclusione la f definita valutando $\xi_i \mapsto \beta_i \in \mathbb{F}$ e $\gamma_j \mapsto \eta_j \in \mathbb{F}$ è ben definita e fa al caso nostro. Sia $f_a : A_a \to \mathbb{F}$ la localizzazione di f.

A questo punto è facile rendersi conto che $f_a(y) \oplus f_a(z) \simeq f_a(x) = x$ tramite l'isomorfismo dato da $f_a(g)$ con inversa $f_a(g^{-1})$, dove f_a opera componente per componente su tutte le matrici. Questo è assurdo perché avevamo supposto x indecomponibile su $\mathbb{F}$.

Nello stesso identico stile, supponiamo che due rappresentazioni $x, y \in \mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$ siano non isomorfe su $\mathbb{F}$, ma che su $\mathbb{E}$ esista un isomorfismo $g = (g_i)_{i\in I} : x \to y$. Sia $\widetilde{\mathbb{F}}$ il campo finitamente generato su $\mathbb{F}$ dalle entrate delle g_i (le entrate delle g_i^{-1} stanno in questo campo). Esattamente come prima, sfruttando che $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ si può trovare un omomorfismo $\mathbb{F}$-lineare $s : R \to \mathbb{F}$, dove R è una $\mathbb{F}$-algebra in $\mathbb{E}$ contenente tutte le entrate delle g_i e delle g_i^{-1}. Si conclude notando che $(s(g_i))_{i\in I}$ è un isomorfismo tra $s(x) = x$ e $s(y) = y$ con inversa $(s(g_i^{-1}))_{i\in I}$. □

Teorema 3.5.2. *Sia (S, O) un quiver, $\mathbb{F}$ un campo algebricamente chiuso,* $\operatorname{char}\mathbb{F} = p$ *e $\alpha \in \Gamma_+$. Allora valgono le seguenti:*

a) Se $\alpha \in \Delta_+$ si ha che $\mathcal{I}^\alpha(S, O, \mathbb{F}) > 0$.

b) Se $\alpha \in \Delta_+^{im}$ si ha che $\mathcal{I}^\alpha(S, O, \mathbb{F}) = \infty$.

Dimostrazione. È una diretta conseguenza della proposizione appena dimostrata e del teorema (3.4.12). □

Ciò che ci manca da dimostrare sono i teoremi di esistenza nel caso di campi algebricamente chiusi di caratteristica 0. Enunciamo una versione del teorema di Chevalley (si veda [Sta22], 29.22.3) che sarà utile per i nostri scopi.

Teorema 3.5.3. *Sia $f: X \to Y$ un morfismo di schemi affini di tipo finito su un anello noetheriano. Allora l'immagine di f è un costruibile.*

Dato un qualsiasi $\delta \in \Gamma_+$, $\mathfrak{m}^\delta(S, O, \mathbb{F})$ può essere visto come insieme degli $\mathbb{F}$-punti di un certo schema affine (di tipo finito) $\mathfrak{m}^\delta$ su $\mathbb{Z}$, con anello delle coordinate R^δ. Anche $\mathrm{GL}(\delta)$ può essere visto come uno schema affine (di tipo finito) di gruppo su $\mathbb{Z}$, con anello delle coordinate

$$Q^\delta = \mathbb{Z}\left[\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n, (\det \mathbf{X}_1)^{-1}, \ldots, (\det \mathbf{X}_n)^{-1}\right],$$

dove le $\mathbf{X}_i$ sono matrici di indeterminate con rispettive dimensioni δ_i. Con questo nuovo punto di vista possiamo adesso dare una definizione un po' più generale di $\mathbb{F}$-punti assolutamente indecomponibili in $\mathfrak{m}^\alpha$: sono tutti e soli gli $\mathbb{F}$-punti che non stanno nell'immagine di (i.e. non fattorizzano tramite) nessun morfismo del tipo

$$h_{\beta\gamma}: \mathrm{GL}(\alpha)^\alpha \underset{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}}{\times} \mathfrak{m}^\beta \underset{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}}{\times} \mathfrak{m}^\gamma \longrightarrow \mathfrak{m}^\alpha,$$

dove $\beta, \gamma \in \Gamma_+$ sono tali che $\beta + \gamma = \alpha$ e $h_{\beta\gamma}$ a livello di punti manda $(g, x, y) \mapsto (g \cdot (x \oplus y))$. Per il teorema di Chevalley, il complementare C^α dell'unione di queste immagini, al variare di $\beta + \gamma = \alpha$, deve essere un costruibile. A meno di raffinamento possiamo quindi dire che C^α è ricoperto da un certo insieme finito di schemi affini di tipo finito su $\mathbb{Z}$, $\{C_k^\alpha\}$.

Teorema 3.5.4. *Sia $\mathbb{F}$ un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0. Allora:*

$$\textit{Se } \alpha \in \Delta_+ \textit{ si ha che } \mathcal{I}^\alpha(S, O, \mathbb{F}) > 0.^1$$

Dimostrazione. Grazie alla proposizione (3.5.1) possiamo limitarci ad analizzare il caso $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{Q}}$. Per il teorema (3.5.2), se $\alpha \in \Delta_+$, C^α contiene almeno un $\overline{\mathbb{F}}_p$-punto per ogni primo p, e questo è anche definito su $\mathbb{F}_p$. Di conseguenza possiamo supporre senza perdita di generalità che C_1^α contenga un $\overline{\mathbb{F}}_p$-punto per infiniti p. In altre parole, il suo anello di coordinate ridotto A^α è tale per cui

$$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A^\alpha, \overline{\mathbb{F}}_p) = \dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_p \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} A^\alpha, \overline{\mathbb{F}}_p) > 0 \quad \forall\, \alpha \in \Delta_+ \tag{3.6}$$

per infiniti p. Di conseguenza si ha che

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} A^\alpha > 0 \quad \forall\, \alpha \in \Delta_+.$$

Per dimostrare il punto a) del teorema ci basterebbe far vedere che

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}} \overline{\mathbb{Q}} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} A^\alpha > 0 \quad \forall\, \alpha \in \Delta_+, \quad \text{cioè che} \quad \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} A^\alpha > 0 \quad \forall\, \alpha \in \Delta_+,$$

[1] In realtà con un po' più di attenzione si può dimostrare anche che, per $\alpha \in \Delta_+^{im}$, le classi di isomorfismo di indecomponibili su $\mathbb{F}$ di dimensione α sono infinite, analogamente a quanto fatto in caratteristica p.

in quanto A^α è ridotto e quindi lo sono anche le tensorizzazioni per $\mathbb{Q}$ e $\overline{\mathbb{Q}}$ (si vedano come localizzazioni).

Supponiamo per assurdo che $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} A^\alpha = 0$ per un certo $\alpha \in \Delta_+$, cioè che $(\mathbb{Z}^*)^{-1}A^\alpha = 0$. Questo significa che, detta $i : \mathbb{Z} \to A^\alpha$ la mappa associata allo schema su $\mathbb{Z}$, $i(m) = 0$ per qualche intero $m > 0$. Ma questo significa che per tutti i primi p che non dividono m vale $\mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}} A^\alpha = 0$, in contraddizione con (3.6).

□

Parte III

Algebre di Kac-Moody

Capitolo 4

Algebre di Lie graduate

4.1 Algebre locali

In questa sezione andremo a richiamare alcune proprietà delle algebre di Lie graduate, partendo da un punto di vista un po' più generale.

Definizione 4.1.1. Sia V uno spazio vettoriale su campo K e $A \subset V \times V$ un sottospazio invariante per la riflessione $(v, w) \mapsto (w, v)$, e chiuso per combinazioni bilineari, cioè tale che dati $(v, w), (v', w) \in A$ si abbia $(kv + hv', w) \in A \quad \forall\, k, h \in K$. Data un'operazione bilineare parzialmente definita $[\ ,\ ] : A \to V$, chiamiamo *prespazio* la terna $(V, A, [\ ,\ ])$ (o semplicemente V se l'operazione sarà chiara dal contesto).

Dato un prespazio $(V, A, [\ ,\ ])$ e dati $X_1, \dots, X_n \subset V$ sottoinsiemi qualsiasi di elementi, utilizzeremo spesso le seguenti notazioni:

- $[X_1 X_2]$, o equivalentemente $(\operatorname{ad} X_1)(X_2)$, indicherà lo span (eventualmente banale) degli $[xy]$ al variare di $(x, y) \in A \cap (X_1 \times X_2)$.
- $[X_1 X_2 \dots X_n] := [\dots [[X_1 X_2] X_3] \dots X_n]$.
- $(X_1)^k := [\underbrace{X_1 X_1 \dots X_1}_{k \text{ volte } X}]$

Definizione 4.1.2. Un omomorfismo di prespazi $f : (V, A, [\ ,\ ]) \to (W, B, [\ ,\ ])$ è un'applicazione lineare tale che $(f \times f)(A) \subset B$ e $f([vw]) = [f(v) f(w)]$ per ogni $(v, w) \in A$.

Definizione 4.1.3. Dato un prespazio $(V, A, [\ ,\ ])$, si dice *sottoprespazio* un sottospazio vettoriale W tale che $[WW] \subset W$.

Definizione 4.1.4. Dato un prespazio $(V, A, [\ ,\ ])$, un sottospazio vettoriale I è detto *ideale* se $[IV], [VI] \subset I$.

Proposizione 4.1.5. *Dato un prespazio $(V, A, [\ ,\ ])$ e un suo ideale I, lo spazio vettoriale V/I ha una naturale struttura di prespazio indotta da $[\ ,\ ]$, con il dominio della nuova operazione sarà l'immagine di A tramite $\pi \times \pi : V \times V \to V/I \times V/I$.*

Inoltre π è un omomorfismo di prespazi.

Dimostrazione. Dato $(v, w) \in A$ e $\overline{v} = \pi(v)$, $\overline{w} = \pi(w)$, si ponga $[\overline{vw}] = \overline{[vw]}$. La buona definizione, la bilinearità e il fatto che π sia omomorfismo di prespazi sono una semplice verifica. □

Proposizione 4.1.6. *I kernel di omomorfismi di prespazi sono ideali, e valgono gli usuali teoremi di omomorfismo (a patto di chiamare "suriettivo" un omomorfismo f che sia suriettivo nel senso standard, e tale che $f \times f$ sia suriettiva come mappa tra gli insiemi di definizione delle rispettive operazioni).*

Dimostrazione. È un semplice esercizio. □

Osservazione 4.1.7. *Le definizioni appena date si applicano anche ai prespazi con identità, ovvero tali che esista un elemento $1_V \in V$ con $\{1\} \times V \cup V \times \{1\} \subset A$ e con $[1_V v] = [v 1_V] = v \quad \forall\, v \in V$. Le uniche richieste aggiuntive che facciamo sono che gli omomorfismi e le sottoalgebre preservino l'identità.*

Definizione 4.1.8. Un prespazio *graduato* è un prespazio V dotato di una decomposizione in spazi vettoriali

$$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$$

tale che valgano le seguenti proprietà:

(P1) $\dim V_i < \infty$.

(P2) $[V_i V_j] \subset V_{i+j}$.

(P3) $V_{-1} \oplus V_0 \oplus V_1$ genera tutto V come prespazio.

Se non si richiede (P1) si parla più genericamente di prespazio graduato infinito. $\Phi : V \to W$ è detto un omomorfismo di prespazi graduati (infiniti) se è un omomorfismo di prespazi tale che $\Phi(V_i) \subset W_{\phi(i)}$ dove $\phi = \pm \mathrm{Id}$.

Definizione 4.1.9. Dato un prespazio graduato $V = \bigoplus V_i$, un elemento x è detto omogeneo se è contenuto in uno dei V_i. Un sottospazio vettoriale W è detto omogeneo se $W = \bigoplus W \cap V_i$.

Osservazione 4.1.10. *I sottospazi vettoriali omogenei sono tutti e soli quelli generati da elementi omogenei.*

Gli ideali omogenei sono tutti e soli gli ideali generati (come ideali) da elementi omogenei.

Osservazione 4.1.11. *Quozientare per un ideale omogeneo mantiene in modo naturale la struttura graduata. Inoltre il kernel di un omomorfismo tra prespazi graduati è un ideale omogeneo.*

Definizione 4.1.12. Sia $k > 0$ un intero e $(V, A, [\ ,\ ])$ un prespazio graduato con gradazione concentrata tra $-k$ e k, cioè tale che $V = \bigoplus_{i=-k}^{k} V_i$. Se A è lo spazio chiuso per combinazioni bilineari generato da

$$\bigcup_{|i+j|\leq k} V_i \times V_j,$$

allora V è detto *prespazio k-locale*.

Definizione 4.1.13. Un'algebra associativa (risp. algebra di Lie) è un prespazio con operazione $[\ ,\ ]$ globalmente definita e tale che sia associativa con identità (risp. antisimmetrica e che soddisfi l'identità di Jacobi $[[xy]z] + [[zx]y] + [[yz]x] = 0 \ \ \forall\ x, y, z \in G$).

Definizione 4.1.14. Sia $k > 0$ un intero e $(V, A, [\ ,\ ])$ un prespazio h-locale. Se $[\ ,\ ]$ è antisimmetrica e soddisfa l'identità di Jacobi ogni qualvolta tutti e 6 i bracket in essa siano definiti, allora V è detto algebra di Lie *k-locale*.

Per le algebre (di Lie o associative) graduate e per quelle k-locali, possiamo definire gli omomorfismi, gli ideali e i sottospazi omogenei nel senso dei prespazi graduati. I quozienti sono un po' più delicati nel caso delle algebre k-locali, in quanto non è necessariamente vero che l'associatività o Jacobi continuino a valere.

Per comodità di notazione talvolta parleremo di algebra (di Lie) ∞-locale per indicare semplicemente un'algebra (di Lie) graduata.

Osservazione 4.1.15. *Fissato $k \in \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$ e fissato un intero $0 < h < k$, a ogni algebra (di Lie) k-locale $G = \bigoplus_{i=-k}^{k} G_i$ si può associare l'algebra (di Lie) h-locale ${}^h\widehat{G} = \bigoplus_{i=-h}^{h} G_i$, con operazione indotta, detta parte h-locale di G.*

Osservazione 4.1.16. *Sia $(G, \cdot)$ un'algebra associativa. Possiamo darle una struttura di algebra di Lie k-locale ponendo semplicemente $[xy] = xy - yx$. Quando ci riferiremo a G con questa struttura, la indicheremo con G_L.*

Definizione 4.1.17. Fissato $k \in \{1, \infty\}$, sia G un'algebra di Lie k-locale. Diremo che un'algebra graduata U dotata di un'inclusione (tra prespazi graduati) $i : G \to U_L$ è l'*algebra inviluppante universale* di G se data una qualsiasi algebra V e un omomorfismo $f : G \to V_L$, esiste ed è unica $f : U \to V$ tale che $g \circ i = f$.

Proposizione 4.1.18. *L'inviluppante universale esiste ed è unico a meno di isomorfismo.*

Dimostrazione. L'unicità segue dalla proprietà universale, quindi concentriamoci sull'esistenza. Detta S l'algebra tensoriale

$$\bigoplus_{i\geq 0} \underbrace{G \otimes G \otimes \cdots \otimes G}_{i \text{ volte}},$$

sia I l'ideale di S generato da elementi della forma

$$[xy] - x \otimes y + y \otimes x \tag{4.1}$$

per x, y tali che il bracket abbia senso. È una facile verifica notare che I è generato da elementi omogenei.

Osservazione 4.1.19. *Fissata una base omogenea di G data da $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, I è generato come spazio vettoriale da elementi della forma*

$$-x_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes x_{\alpha_n}+x_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes x_{\alpha_{j+1}}\otimes x_{\alpha_j}\otimes\cdots\otimes x_{\alpha_n}+x_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes[x_{\alpha_j}x_{\alpha_{j+1}}]\otimes\cdots\otimes x_{\alpha_n},$$

dove $\alpha_i\in A\ \ \forall\ i$ e il bracket $[x_{\alpha_j}x_{\alpha_{j+1}}]$ è definito in G.

Sia $U=S/I$ (che per quanto osservato in precedenza preserva la gradazione, essendo I omogeneo). Affermiamo che U, dotato della naturale mappa $i: G\to U_L$, è l'inviluppante universale di G. In effetti osserviamo innanzitutto che i è omomorfismo (di prespazi graduati), infatti

$$i([xy])\equiv x\otimes y-y\otimes x\pmod I$$

Data poi un'algebra V dotata di un omomorfismo $j: G\to V_L$, possiamo estendere j a un omomorfismo (di algebre associative) $e: S\to V$ mandando $x_1\otimes\cdots\otimes x_l$ in $j(x_1)\cdots j(x_l)$. Ma questo omomorfismo fattorizza tramite U, infatti preso un generatore di I della forma in (4.1), si ha che

$$e([xy]-x\otimes y+y\otimes x)=[e(x)e(y)]+e(x)\otimes e(y)+e(y)\otimes e(x)=0$$

infine l'unicità dell'estensione segue dal fatto che G genera U come algebra associativa. Questo conclude. □

4.2 Algebra inviluppante universale

Vogliamo adesso ottenere qualche informazione in più sugli inviluppanti universali. Per quello che ne sappiamo adesso potrebbero pure essere banali e non darci alcuna informazione sull'algebra di Lie sottostante.

L'obiettivo delle prossime pagine sarà dimostrare che in realtà, se $k\in\{1,\infty\}$, data G algebra di Lie k-locale e preso (U,i) il suo inviluppante universale, la mappa i è iniettiva.

Sia $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ una base omogenea di G. È noto che gli elementi del tipo $x_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes x_{\alpha_n}$ con $\alpha_j\in A\ \ \forall\ j\le n$ formino una base $\mathcal{B}_n$ di $G^{\otimes n}$ (il prodotto tensore lungo zero diciamo che è 1, che è in effetti una base per $G^{\otimes 0}$). Fissiamo adesso un ordinamento totale su A, in modo che sia un raffinamento dell'ordinamento parziale indotto dal grado. Vogliamo andare a definire un ordinamento parziale sugli elementi di $\mathcal{B}_n$, e per far ciò introduciamo la seguente notazione.

Definizione 4.2.1. Sia $x=x_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes x_{\alpha_n}\in\mathcal{B}_n$. Uno *scambio lecito* consiste nell'invertire gli elementi in posizione j-esima e $j+1$-esima tali per cui $[x_{\alpha_j}x_{\alpha_{j+1}}]$ è definito, ovvero tali per cui la somma dei gradi di x_{α_j} e $x_{\alpha_{j+1}}$ è in modulo $\le k$.

Definizione 4.2.2. Preso $x = x_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_n} \in \mathcal{B}_n$, definiamo il suo indice $i(x)$ come il numero di coppie $(j < l)$ tali che $\alpha_j > \alpha_l$.

A questo punto diremo che $x < y$ in $\mathcal{B}_n$ se è possibile ottenere x a partire da y tramite scambi leciti. È facile notare che l'ordinamento parziale appena definito è un buon ordinamento, cioè non esistono catene discendenti infinite.

Definizione 4.2.3. Diciamo che un elemento $x = x_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_n} \in \mathcal{B}_n$ è *standard* se è minimale in $\mathcal{B}_n$ secondo l'ordinamento appena definito. Indichiamo con $\mathcal{C}_n$ il sottoinsieme di $\mathcal{B}_n$ costituito dagli elementi standard.

Osservazione 4.2.4. *Se $x = x_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_n} \in \mathcal{B}_n$ ed esiste una coppia $(j, j+1)$ con $\alpha_j > \alpha_{j+1}$ e bracket definito, allora applicando lo scambio semplice l'indice diminuisce di 1.*

Proposizione 4.2.5. *Sia I l'ideale di S tale che $U = S/I$ è l'inviluppante universale di G. Allora $\bigcup_j \mathcal{C}_j$ genera U come spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Basta far vedere che ogni elemento di $\mathcal{B}_n$ sta in $\widetilde{S} = \operatorname{span}(\bigcup_j \mathcal{C}_j) + I$. Procediamo per induzione su n con passo base $n = 0, 1$ banale. Fissiamo quindi un $n > 1$ e assumiamo l'ipotesi induttiva. Procediamo adesso per induzione sul buon ordinamento definito su $\mathcal{B}_n$, con passo base ovvio (elementi minimali sono elementi di $\mathcal{C}_n$). Sia quindi $x = x_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_n}$ un elemento minimale in $\mathcal{B}_n \setminus \widetilde{S}$ (ma non in $\mathcal{C}_n$). Allora esiste una coppia di posizioni $(j, j+1)$ su cui è applicabile uno scambio lecito. Per l'osservazione (4.1.19) troviamo in I l'elemento

$$-x_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_n} + x_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_{j+1}} \otimes x_{\alpha_j} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_n} + x_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes [x_{\alpha_j} x_{\alpha_{j+1}}] \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_n}$$

e questo ci permette di concludere in quanto

$$x_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_{j+1}} \otimes x_{\alpha_j} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_n} + x_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes [x_{\alpha_j} x_{\alpha_{j+1}}] \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_n} \in \widetilde{S},$$

per ipotesi induttiva su n e per la minimalità di x in $\mathcal{B}_n \setminus \widetilde{S}$. In conclusione $\widetilde{S} = S$. □

Proposizione 4.2.6. *Gli elementi di $\mathcal{C}_n$ al variare di n (o meglio, le loro immagini tramite la proiezione $S \to U$) formano una base per lo spazio vettoriale $U = S/I$.*

Dimostrazione. Abbiamo appena mostrato che generano U, ci rimane da far vedere che sono linearmente indipendenti. Sia $\mathcal{V}$ lo spazio vettoriale formalmente generato da essi, ovvero con base formata da elementi che chiamiamo $\overline{x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_n}}$ al variare di $n \geq 0$ e $x_{\alpha_1} \otimes x_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_n} \in \mathcal{C}_n$. Costruiamo un'applicazione lineare $f : S \to \mathcal{V}$ tale che

$$f(x_{\alpha_1} \otimes x_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_n}) = \overline{x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_n}} \tag{4.2}$$

e, se $[x_{\alpha_j} x_{\alpha_{j+1}}]$ è definito,

$$f(x_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_n} - x_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_{j+1}} \otimes x_{\alpha_j} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_n}) = f(x_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes [x_{\alpha_j} x_{\alpha_{j+1}}] \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_n}). \tag{4.3}$$

Procediamo ricorsivamente. Sia $\mathcal{L}_n$ lo spazio vettoriale generato da $\mathcal{B}_n$ (cioè i prodotti tensori di lunghezza n in S) e $\mathcal{L}_{n,h}$ lo spazio vettoriale generato dagli elementi di $\mathcal{B}_n$ di indice $\leq h$ (se $h = -1$, sarà banale per convenzione). Dati $m \geq 1$ e $k \geq 0$ supponiamo per ipotesi induttiva di essere riusciti a definire parzialmente f su $\mathcal{L}_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{m-1} \oplus \mathcal{L}_{m,k-1}$, in modo che (4.2) e (4.3) valgano quando gli argomenti di f si trovano in questo spazio. Allora definiamo f sui prodotti tensori in $\mathcal{L}_{m,k} \setminus \mathcal{L}_{m,k-1}$ nel modo seguente: se $x = x_{\alpha_1} \otimes x_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_m} \in \mathcal{C}_m$ di indice k, poniamo

$$f(x) = \overline{x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_m}}.$$

Se invece $y = y_{\alpha_1} \otimes y_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes y_{\alpha_m}$ è di indice k e non sta in $\mathcal{C}_m$, scelto j tale che si possa effettuare uno scambio lecito tra le posizioni j e $j+1$ che fa calare l'indice (esiste!), porremo

$$f(y) = f(y_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes y_{\alpha_{j+1}} \otimes y_{\alpha_j} \otimes \cdots \otimes y_{\alpha_m}) + f(y_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes [y_{\alpha_j} y_{\alpha_{j+1}}] \otimes \cdots \otimes y_{\alpha_m}) \tag{4.4}$$

Osservazione 4.2.7. *Supponiamo di avere due possibili opzioni per la scelta di j, chiamiamole $j_1 < j_2$. Allora la definizione di f non dipende da quale delle due opzioni scegliamo.*

Dimostrazione. Ci sono due possibilità:

Caso 1: $j_2 > j_1 + 1$.

Poniamo per comodità $y_{\alpha_{j_1}} = u$, $y_{\alpha_{j_1+1}} = v$, $y_{\alpha_{j_2}} = w$, $y_{\alpha_{j_2+1}} = x$. Allora ponendo $j = j_1$ in (4.4) e applicando l'ipotesi induttiva si ottiene

$$\begin{aligned} &f(\cdots \otimes v \otimes u \otimes \cdots \otimes x \otimes w \otimes \dots) + \\ &+ f(\cdots \otimes v \otimes u \otimes \cdots \otimes [wx] \otimes \dots) + \\ &+ f(\cdots \otimes [uv] \otimes \cdots \otimes x \otimes w \otimes \dots) + \\ &+ f(\cdots \otimes [uv] \otimes \cdots \otimes [wx] \otimes \dots), \end{aligned}$$

che è la stessa cosa che si ottiene ponendo $j = j_2$ in (4.4) e applicando l'ipotesi induttiva.

Caso 2: $j_2 = j_1 + 1$. Poniamo per comodità $y_{\alpha_{j_1}} = u$, $y_{\alpha_{j_1+1}} = y_{\alpha_{j_2}} = v$, $y_{\alpha_{j_2+1}} = w$. Notiamo subito che l'operazione $[uw]$ è definita, infatti per le richieste fatte su j_1 e j_2 sappiamo che $\alpha_{j_1} > \alpha_{j_2} > \alpha_{j_2+1}$ quindi che $\deg u \geq \deg v \geq \deg w$. Sappiamo inoltre che $|\deg u + \deg v| \leq k$ e che $|\deg v + \deg w| \leq k$ quindi $|\deg u + \deg w| \leq k$

in quanto

$$\deg u + \deg v \geq \deg u + \deg w \geq \deg v + \deg w.$$

Se poniamo $j = j_1$ in (4.4) e applichiamo l'ipotesi induttiva (possiamo perché il termine con $u \otimes v \otimes w$ è quello con indice massimo tra tutte le possibili permutazioni) si ottiene

$$f(\cdots \otimes w \otimes v \otimes u \otimes \dots) + f(\cdots \otimes [vw] \otimes u \otimes \dots) +$$

$$+ f(\cdots \otimes v \otimes [uw] \otimes \dots) + f(\cdots \otimes [uv] \otimes w \otimes \dots),$$

mentre ponendo $j = j_2$ si ottiene

$$f(\cdots \otimes w \otimes v \otimes u \otimes \dots) + f(\cdots \otimes u \otimes [vw] \otimes \dots) +$$

$$+ f(\cdots \otimes [uw] \otimes v \otimes \dots) + f(\cdots \otimes w \otimes [uv] \otimes \dots)$$

Per mostrare che queste due espressioni sono in realtà uguali usiamo che $k \in \{1, \infty\}$. Infatti in entrambi i casi risultano definiti in $G\ [u[vz]]$ e cicliche (nel caso $k = 1$ le uniche gradazioni possibili per la terna (u, v, z) sono $(1, 0, -1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(0, 0, -1)$), quindi

$$f(\cdots \otimes ([uv] \otimes w - w \otimes [uv] + [wu] \otimes v - v \otimes [wu] + [vw] \otimes u - u \otimes [vw]) \otimes \dots) = 0,$$

in quanto per ipotesi induttiva deve essere uguale a

$$f(\cdots \otimes ([[uv]w] + [[wu]v] + [[vw]u]) \otimes \cdots) = 0.$$

□

Il fatto che la definizione di f non dipenda dalla scelta di j ci permette adesso di affermare che (4.3) è valida per argomenti contenuti in $\mathcal{L}_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{m-1} \oplus \mathcal{L}_{m,k}$ che è proprio ciò che volevamo.

Se iteriamo questa procedura arriviamo così a definire f globalmente in modo che si annulli sui generatori (come spazio vettoriale) di I (osservazione (4.1.19)) e in modo che le immagini degli elementi standard siano linearmente indipendenti. Questo prova la lineare indipendenza degli elementi standard su S/I, che è proprio ciò che ci mancava per dire che costituiscono una base. □

Corollario 4.2.8. *Sia $k \in \{1, \infty\}$. Data un'algebra di Lie k-locale $G = \bigoplus_{j=-k}^{k} G_j$, se (U, i) è il suo inviluppante universale allora i è iniettiva.*

Dimostrazione. Per la proposizione appena dimostrata gli elementi della base $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ di G restano linearmente indipendenti in U in quanto sono elementi distinti di $\mathcal{C}_1$. □

Osservazione 4.2.9. *Fissiamo $k \in \{1, \infty\}$. Siano G un'algebra di Lie k-locale e (U, i) il suo inviluppante universale. Sia inoltre $\widetilde{G}$ l'algebra di Lie graduata generata da G in U_L. Allora U è anche l'inviluppante universale per $\widetilde{G}$.*

Dimostrazione. La proprietà universale è banalmente verificata, sfruttando la proprietà universale di inviluppante per G. □

Proposizione 4.2.10. *Sia $G = \bigoplus G_i$ un'algebra di Lie graduata con parte 1-locale $\widehat{G} = G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_1$. Supponiamo di avere una sottoalgebra di Lie 1-locale $\widehat{G'} = G'_{-1} \oplus G'_0 \oplus G'_1 \subset \widehat{G}$ che generi G come algebra di Lie. Allora $G_0 = G'_0$ e $G_{\pm n} = (G_{\pm 1})^n \ \ \forall\, n \in \mathbb{Z}_{>0}$.*

Dimostrazione. Vogliamo seguire un approccio per induzione, ma per farlo ci servono le seguenti definizioni:

Definizione 4.2.11. Denotiamo con F l'insieme delle applicazioni $f : G \times G \times \cdots \times G \to G$ (f contiene un numero finito arbitrario di argomenti) ottenute tramite incapsulamento di bracket. Un esempio può essere $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [[x_1 x_2][x_3 x_4]]$. La *lunghezza* di $f \in F$ è semplicemente il suo numero di argomenti, mentre *l'altezza* è il massimo numero di bracket incapsulati presenti nella sua scrittura (nell'esempio f ha lunghezza 4 e altezza 2).

Dato $v \in \{-1, 0, 1\}^k$, scriveremo $f \in {}^v F$ se vorremo specificare che f ha lunghezza k, e che stiamo restringendo il dominio a $G'_{v_1} \times G'_{v_2} \times \cdots \times G'_{v_k}$.

Indichiamo infine con ${}^v F^h \subset {}^v F$ il sottoinsieme delle applicazioni di altezza h, e con $\deg v := \sum v_i$ il *grado* di v (diremo che una qualsiasi funzione in ${}^v F$ ha grado $\deg v$).

Osserviamo che se $f \in F$ ha lunghezza 1 allora $f(x) = x$, e che in generale le funzioni in F di lunghezza l hanno altezza al più $l - 1$. Inoltre, se $g \in F$ ha lunghezza l e altezza $l - 1$ allora dev'essere, a meno di un segno, della forma $g(x_1, \ldots, x_l) = [x_1 \cdots x_l]$.

Il nostro obiettivo è far vedere che per ogni v l'immagine di tutte le funzioni in ${}^v F$ sta in

$$\widetilde{G} := \cdots \oplus (G'_{-1})^2 \oplus G'_{-1} \oplus G'_0 \oplus G'_1 \oplus (G'_1)^2 \oplus \cdots ,$$

a questo punto, sfruttando che $\widehat{G'}$ genera G, per linearità la proposizione sarebbe dimostrata. In realtà mostriamo una cosa leggermente più forte con i seguenti tre lemmi.

Lemma 4.2.12. *Siano $f_1, f_2, f \in F$ funzioni di lunghezza $l_1, l_2, l_1 + l_2$ rispettivamente, tali che $f(x, y) = [f_1(x) f_2(y)]$, dove x e y sono vettori nei domini opportuni, di lunghezza ≥ 1. Allora presi $X_i \subset G$, ($i \leq l_1$) e $Y_j \subset G$ ($j \leq l_2$) dei sottoinsiemi qualsiasi, si ha che*

$$f(X_1, \ldots, X_{l_1}, Y_1, \ldots, Y_{l_2}) \subset \sum_{j=1}^{l_2} f_2(Y_1, \ldots, Y_{j-1}, [f_1(X_1, \ldots, X_{l_1}) Y_j], Y_{j+1}, \ldots, Y_{l_2}). \tag{4.5}$$

Dimostrazione. È una banale conseguenza del fatto che $\mathrm{ad}(f_1(X_1, \ldots, X_{l_1}))$ sono tutte derivazioni di G. □

Osservazione 4.2.13. (4.5) *è un'uguaglianza (tra elementi e non più tra sottospazi vettoriali) se gli X_i e Y_i non rappresentano più dei sottoinsiemi ma dei singoli elementi di G.*

Lemma 4.2.14. *Sia $f \in F$ di lunghezza l. Detti $X_i \subset G$ $(i \leq l)$ dei sottoinsiemi qualsiasi, si ha*

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_l) \subset \sum_{\sigma \in S_l} [X_{\sigma(1)} X_{\sigma(2)} \cdots X_{\sigma(l)}]$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione discendente sull'altezza h, con passo base $h = l - 1$ vero per quanto già osservato. Fissiamo $h < l - 1$ e assumiamo l'ipotesi induttiva. Preso $f \in {}^{v}F^{h}$ di lunghezza l, per opportuni v^1, v^2 con $(v^1, v^2) = v$ e per opportune $f_1 \in {}^{v^1}F,\ f_2 \in {}^{v^2}F$ si ha che $f = [f_1 f_2]$. Almeno una tra f_1 e f_2 ha altezza $h - 1$, e per quanto si vuole dimostrare possiamo tranquillamente supporre che sia f_1. Adesso grazie al lemma precedente possiamo concludere applicando l'ipotesi induttiva, in quanto ciascun addendo del RHS di (4.5) è una funzione multilineare di altezza almeno $h + 1$. □

Lemma 4.2.15. *Sia $v \in \{-1, 0, -1\}^k$ di grado $\pm n$ con $n \geq 0$, e $f \in {}^{v}F$. Allora la sua immagine è contenuta in $G'_0 \oplus G'_{\pm 1} \oplus \cdots \oplus (G'_{\pm 1})^n$.*

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione sulla lunghezza, con passo base lunghezza 1 banale. Fissiamo una lunghezza $l > 1$ e assumiamo l'ipotesi induttiva. Per quanto mostrato nel precedente lemma non è restrittivo supporre che f sia della forma $f(x_1, \ldots, x_l) = x_1 x_2 \cdots x_l$. Ovviamente possiamo anche supporre che v_1 e v_2 siano entrambi 1 o entrambi -1, altrimenti l'immagine di f sarebbe contenuta nell'immagine di una funzione di lunghezza minore. Supponiamo siano entrambi 1 (l'altro caso è identico). Sia adesso m il più piccolo indice i tale che $v_i \neq 1$ (se non esiste possiamo già concludere). Adesso il lemma (4.2.12) applicato alla funzione $g(x_1, \ldots, x_m) = x_1 x_2 \cdots x_m$ con $x_i \in G'_{v_i}$ ci permette di dire che

$$\operatorname{Im} g \subset \sum_{j=1}^{m} [(G'_1)^{j-1} [G'_1 G'_{v_m}] (G'_1)^{m-j-1}] \subset \sum_{j=1}^{m} [(G'_1)^{j-1} G'_{1+v_m} (G'_1)^{m-j-1}]$$

Di conseguenza

$$\operatorname{Im} f \subset \sum_{j=1}^{m} [(G'_1)^{j-1} G'_{1+v_m} (G'_1)^{m-j-1} G'_{v_{m+1}} \cdots G'_{v_l}].$$

Concludiamo applicando l'ipotesi induttiva in quanto ciascun addendo del RHS è immagine di una funzione multilineare di lunghezza minore di $l - 1$. □

□

Corollario 4.2.16. *Una diretta conseguenza della proposizione appena dimostrata è che se $\widehat{G}' = G'_{-1} \oplus G'_0 \oplus G'_1$ è una sottoalgebra di Lie 1-locale di $\widehat{G}$, detta G' l'algebra di Lie da*

essa generata in G, si ha che G' ha come parte di grado $\pm n$ (con $n > 0$) proprio $(G'_{\pm 1})^n$, e G'_0 come parte di grado 0.

Possiamo adesso enunciare nella prossima proposizione un altro fatto che ci tornerà utile sulla struttura dell'inviluppante universale. Porremo $k = 1$ in quanto l'enunciato diventa del tutto banale se $k = \infty$.

Proposizione 4.2.17. *Sia $G = G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_1$ un'algebra di Lie 1-locale, e (U, i) il suo inviluppante universale. Allora detta $\widetilde{G} = \bigoplus \widetilde{G}_j$ l'algebra di Lie graduata generata da G in U_L, la sua parte 1-locale è proprio G. Inoltre vale in generale che $\widetilde{G}_n = (G_1)^n$, $\widetilde{G}_{-n} = (G_{-1})^n \quad \forall\, n > 0$.*

Dimostrazione. Segue direttamente dal corollario (4.2.16). □

Definizione 4.2.18. Fissiamo un'algebra di Lie 1-locale $\widehat{G}$. Un'algebra di Lie graduata $G = \bigoplus G_i$ con parte 1-locale $\widehat{G}$ è detta *massimale* (risp. *minimale*) su $\widehat{G}$ se, data G' algebra di Lie graduata con parte 1-locale isomorfa a $\widehat{G}$, l'isomorfismo tra le rispettive parti 1-locali si estende in modo unico a un omomorfismo $G \to G'$ (risp. $G' \to G$). Inoltre questo omomorfismo è suriettivo.

Proposizione 4.2.19. *Sia $\widehat{G}$ un'algebra di Lie 1-locale, e (U, i) il suo inviluppante universale. Allora detta G l'algebra di Lie graduata generata da $\widehat{G}$ in U, affermiamo che questa è massimale su $\widehat{G}$.*

Dimostrazione. Sia G' un'algebra di Lie graduata con parte 1-locale isomorfa a $\widehat{G}$ tramite $f : \widehat{G} \to G'$. Sia (U', i') il suo inviluppante universale. Allora $i' \circ f : \widehat{G} \to U'_L$ si estende a $\overline{f} : U \to U'$, che mi induce una mappa tra G e G' (o meglio, tra le rispettive immagini isomorfe in U e U'). L'unicità e la suriettività sono una conseguenza del fatto che G e G' siano generate dalle rispettive parti 1-locali. □

Proposizione 4.2.20. *Siano $\widehat{G}, G$ come nella proposizione precedente. Sia I l'ideale omogeneo di G massimo tra quelli con intersezione banale con $\widehat{G}$ (esiste in quanto la somma di due ideali omogenei di questo tipo resta omogenea, senza termini di grado 1, 0, -1. Allora G/I è minimale su $\widehat{G}$.*

Dimostrazione. La proposizione precedente ci permette di dire che una qualsiasi algebra di Lie graduata con parte 1-locale isomorfa a G è ottenibile come quoziente di G per un ideale omogeneo J che interseca banalmente G. Questo conclude in quanto $J \subset I$, quindi la mappa cercata $G/J \to G/I$ consiste nel quozientare ulteriormente per I (o meglio, per la sua immagine in G). □

Proposizione 4.2.21. *Siano $\widehat{G} \subset \widehat{G}'$ due algebre di Lie 1-locali, una inclusa nell'altra. Allora si ha una naturale inclusione tra le rispettive algebre di Lie graduate massimali.*

Dimostrazione. Ancora una volta ci torna estremamente utile l'inviluppante universale: detti (U, i) e (U', i') i rispettivi inviluppanti universali, con $U = S/I$ e $U' = S'/I'$ quozienti delle algebre tensoriali. Per come sono fatti I e I' ((4.1.19)), la naturale inclusione da S in S' passa al quoziente come mappa da U in U'. Quest'ultima è iniettiva in quanto per (4.2.6) abbiamo una descrizione esplicita delle basi di entrambi, e l'immagine della base di U sono elementi distinti della base di U'. Questa inclusione induce una mappa iniettiva tra le rispettive algebre di Lie graduate massimali. □

4.3 Forme invarianti e transitività

Definizione 4.3.1. Una forma bilineare simmetrica $(\ ,\ )$ su un'algebra di Lie G è detta *invariante* se

$$([xy], z) = (x, [yz]) \quad \forall\ x, y, z \in G \tag{4.6}$$

Se G ha una struttura graduata richiederemo anche che $(x, y) = 0$ per ogni coppia di elementi omogenei x, y di grado non opposto.

Analogamente, se G è un'algebra di Lie k-locale, $(\ ,\ )$ è detta invariante quando l'uguaglianza (4.6) vale ogni volta che i bracket sono definiti.

Teorema 4.3.2. *Sia G un'algebra di Lie graduata. Supponiamo di aver definito una forma bilineare invariante sulla parte 1-locale $\widehat{G}$, in modo che $(G_i, G_j) = 0 \ \ \forall\ i + j \neq 0$. Allora esiste un'unica forma invariante su G che estende $(\ ,\ )$ e tale che $(G_i, G_j) = 0 \ \ \forall\ i + j \neq 0$.*

Dimostrazione. Per questioni di linearità basta definire la forma bilineare per coppie di elementi omogenei, e verificare poi la simmetria (risp. l'invarianza) per ogni coppia (risp. terna) di elementi omogenei. Poniamo fin da subito $(a, b) = 0$ per ogni coppia di elementi omogenei a, b con $\deg a + \deg b \neq 0$. Dimostriamo per induzione su k che è possibile definire $(\ ,\ )$ anche su coppie di elementi omogenei di grado opposto e $\leq k$ in modulo, in modo che la simmetria (risp. l'invarianza) valga per coppie (risp. terne) di elementi omogenei di grado $\leq k$ in modulo. Il passo base $k = 1$ è vero per ipotesi e per il fatto di aver posto a zero la forma valutata su termini omogenei di grado diverso. Fissiamo $k > 1$ e assumiamo l'ipotesi induttiva.

Definizione 4.3.3. Sia $g \in G$ un elemento omogeneo di grado d con $d > 1$. Per come è fatto $G_{\pm d}$ esiste una decomposizione $g = \sum_{i=1}^{r} [a_i b_i]$ con a_i, b_i omogenei di grado positivo minore di d. Un discorso analogo vale per gli elementi $g \in G$ omogenei di grado negativo minore di -1; in questo caso avremo i gradi degli a_i, b_i con gradi compresi tra $-d + 1$ e -1, per ogni i. Un tale tipo di decomposizione lo chiameremo sinteticamente *espressione moderata per g* (ovviamente non è univocamente determinata).

Dati $x, y \in G$ di omogenei di gradi k e $-k$ rispettivamente, siano $x = \sum_{i=1}^{l}[x_i x_i']$ e $y = \sum_{j=1}^{m}[y_j y_j']$ delle espressioni moderate per x e y rispettivamente. Porremo

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{l}(x_i, [x_i' y]) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}(x_i, [x_i'[y_j y_j']]).$$

(y, x) è definito nello stesso modo, scambiando cioè i ruoli di x e y e usando le stesse espressioni moderate.

Lemma 4.3.4. *Vale che* $(x_i,\ [x_i'[y_j y_j']]) = ([[x_i x_i']y_j],\ y_j')\ \ \forall\ i, j$. *Di conseguenza*

$$(x, y) = \underbrace{\sum_{i=1}^{l}(x_i,\ [x_i' y])}_{(1)} = \underbrace{\sum_{j=1}^{m}([x y_j],\ y_j')}_{(2)}.$$

Dimostrazione.

$$(x_i,\ [x_i'[y_j y_j']]) = (x_i,\ [[x_i' y_j]y_j']) - (x_i,\ [y_j[x_i' y_j']]) \overset{\text{hp.ind.}}{=} \underbrace{([x_i' y_j],\ [y_j' x_i]) - ([x_i y_j],\ [x_i' y_j'])}_{(*)} =$$

$$\overset{\text{hp.ind.}}{=} ([[x_i[x_i' y_j]],\ y_j') - ([[x_i y_j]x_i'],\ y_j') = ([[x_i x_i']y_j],\ y_j'),$$

dove abbiamo più volte usato la simmetria e l'invarianza assunte nell'ipotesi induttiva. si osservi che il termine $(*)$ rimane invariato scambiando i ruoli delle x e delle y (anche qui stiamo usando l'ipotesi induttiva), il che significa che il valore che abbiamo dato a (x, y) corrisponde al valore dato a (y, x). □

Osservazione 4.3.5. *La definizione che abbiamo dato per* (x, y) *a priori poteva dipendere dalla scelta dell'espressione moderata per* x*, ma il lemma ci ha permesso di scrivere* (x, y) *nella forma* (2)*, che è evidentemente indipendente da questa scelta.*

Grazie all'osservazione e all'ipotesi induttiva la bilinearità sui termini omogenei di grado in modulo $\leq k$ è facilmente verificata: per a, b omogenei dello stesso grado k o $-k$, e c omogeneo di grado opposto si ha $(a+b, c) = (a, c)+(b, c)$ in quanto un'espressione moderata per a, sommata a un'espressione moderata per b, fornisce un'espressione moderata per $a+b$. Per dimostrare il passo induttivo ci basta verificare, per quanto riguarda la simmetria, che essa vale per coppie di elementi omogenei di grado k, ma questo segue da quanto osservato nel corso della dimostrazione del lemma. Per quanto riguarda l'invarianza invece, si considerino tre termini a, b, c omogenei di grado $\leq k$ in modulo; dobbiamo mostrare che $([ab], c) = (a, [bc])$. Possiamo supporre che $\deg a + \deg b + \deg c = 0$ altrimenti entrambi i membri dell'uguaglianza sarebbero 0 per come abbiamo definito la forma sulle coppie di grado non opposto. Possiamo anche supporre che uno dei tre termini abbia grado pari a k in modulo, altrimenti potremmo applicare l'ipotesi induttiva.

Caso 1: $\deg b = \pm k$. Supponiamo $\deg b = k$, per l'altro caso basta fare un ragionamento simmetrico. Allora necessariamente $\deg a, \deg c \leq 0$ altrimenti uno dei due sforerebbe k in modulo. Si scelga una qualsiasi espressione moderata $b = \sum_{i=1}^{n} [b_i b_i']$. Dunque

$$[ab] = \sum_i [a[b_i b_i']] = \sum_i [[ab_i]b_i'] + [[ab_i'](-b_i)],$$

ma adesso si ha che

$$\left(\sum_i [[ab_i]b_i'] + [[ab_i'](-b_i)],\ c \right) = \sum_i ([ab_i]\ ,\ [b_i'c]) + ([ab_i'],\ [(-b_i)c]) =$$

$$= \sum_i (a,\ [b_i[b_i'c]]) + (a,\ [b_i'[(-b_i)c]]) = (a, [bc]),$$

dove nella prima (risp. nella penultima) uguaglianza si usa l'ipotesi induttiva se $\deg a \neq 0$ (risp. se $\deg c \neq 0$), altrimenti l'osservazione (4.3.5) se $\deg(a) = 0$ (risp. se $\deg(c) = 0$). Infatti in quest'ultimo caso abbiamo nel primo (risp. penultimo) termine un'espressione moderata per $[ab]$ (risp. $[bc]$)

Caso 2: $\deg a = \pm k \vee \deg c = \pm k$. Supponiamo $\deg c = k$, gli altri casi si trattano in modo identico. Possiamo supporre $-k \leq \deg b \leq 0$ altrimenti $\deg a$ sforerebbe k in modulo. Sia $c = \sum_i [c_i c_i']$ un'espressione moderata di c. Dunque

$$([ab], c) \overset{(4.3.5)}{=} \sum_i ([[ab]c_i],\ c_i') = \sum_i ([a[c_i b]],\ c_i') + ([[c_i a]b],\ c_i') \overset{\text{hp.ind.}}{=}$$

$$= \sum_i (a,\ [[c_i b]c_i']) + ([a(-c_i)],\ [bc_i']) = \sum_i (a,\ [[c_i b]c_i']) + (a,\ [(-c_i)[bc_i']]) = (a,\ [bc])$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la bilinearità osservata precedentemente.

□

Definizione 4.3.6. Sia $k \in \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$. Diremo che un'algebra di Lie $k-$locale G è *transitiva* se:

(P4) $x \in G_{i \geq 0},\ [xG_{-1}] = 0$ implica $x = 0$

(P5) $x \in G_{i \leq 0},\ [xG_1] = 0]$ implica $x = 0$.

La transitività implica che le rappresentazioni ϕ_{-1} e ϕ_1 di G_0 su G_{-1} e G_1 rispettivamente sono fedeli.

Proposizione 4.3.7. *Un'algebra di Lie graduata $G = \bigoplus G_i$ senza ideali omogenei, è transitiva.*

Dimostrazione. Se per assurdo $[xG_{-1}] = 0$ per $x \neq 0$ in $G_i,\ i \geq 0$ (il caso $i \leq 0$ si tratta analogamente), facciamo allora vedere che

$$I = \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \underbrace{(\operatorname{ad} G_1)^k (\operatorname{ad} G_0)^l x}_{I_{kl}}$$

è un ideale omogeneo non banale di G. Ci basta verificare che si tratti di un ideale, tutto il resto è ovvio. Innanzitutto $[G_1 I] \subset I$. Si vede facilmente per induzione su k che anche $[G_0 I_{kl}] \subset I$, infatti per $k > 0$ vale

$$[G_0 I_{kl}] \subset [[G_0 G_1] I_{(k-1)l}] + [G_1 [G_0 I_{(k-1)l}]] \overset{\text{hp ind.}}{\subset} I.$$

Infine sempre per induzione su k verifichiamo che $[G_{-1} I_{kl}] \subset I$. Il passo base $k = 0$ si affronta con una semplice induzione su l, infatti per $l = 0$ si ha $[G_{-1} x] = 0$ e per $l > 0$ si ha

$$[G_{-1} I_{0l}] \subset [[G_{-1} G_0] I_{0(l-1)}] + [G_0 [G_{-1} I_{0(l-1)}]] \overset{\text{hp ind.}}{\subset} I.$$

Fissando ora $k > 0$ e assumendo l'ipotesi induttiva su k, si ha

$$[G_{-1} I_{kl}] \subset [[G_{-1} G_1] I_{(k-1)l}] + [G_1 [G_{-1} I_{(k-1)l}]] \overset{\text{hp ind.}}{\subset} I.$$

Questo ci fa concludere, dal momento che per (P3) l'algebra di Lie graduata G è generata da $G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_{-1}$.

□

Proposizione 4.3.8. *Siano G, G' algebre di Lie graduate con parte 1-locale $\widehat{G}$. Valgono i seguenti fatti:*

a) Se G è transitiva allora è minimale sulla sua parte 1-locale $\widehat{G}$.

b) Se G è minimale su $\widehat{G}$ con $\widehat{G}$ transitiva, allora è essa stessa transitiva.

c) G e G' sono isomorfe se e solo se lo sono le loro parti 1-locali.

Dimostrazione. Se G non è minimale allora sia J un'ideale omogeneo con $J \cap \widehat{G} = 0$. Sia k l'indice minimo in valore assoluto tale che $J \cap G_k \neq 0$ e supponiamo $k > 1$ (il caso $k < -1$ è identico). Allora $[(J \cap G_k) G_{-1}] = 0$ per minimalità di k, quindi G non può essere transitiva. Il punto b) si dimostra nello stesso identico stile della proposizione (4.3.7): supponendo esista $k > 1$ (il caso $k < -1$ è identico) tale che $[xG{-}1] = 0$ per un qualche $x \neq 0$ in G_k, per avere un assurdo si consideri l'ideale

$$\sum_{i,j \geq 0} (\operatorname{ad} G_1)^i (\operatorname{ad} G_0)^j x.$$

Infine il punto c) è una banale conseguenza del punto a) e della proprietà universale data dalla minimalità. □

Capitolo 5

Algebre di Kac-Moody

Mettiamo adesso a frutto la teoria sviluppata finora per parlare di un particolare tipo di algebre di Lie, le algebre di Kac-Moody, definite a partire da una matrice di Cartan. Per comodità supporremo fin da subito $\mathbb{R}$ come campo base, anche se come si potrà notare tutto ciò che diremo vale anche su $\mathbb{Q}$ e quindi su un qualsiasi campo K di caratteristica 0, estendendo gli scalari.

5.1 Matrici di Cartan

Definizione 5.1.1. Sia $A = (a_{ij}),\ i, j = 1, \dots, n$ una matrice a coefficienti interi. Siano $G_{-1},\ G_0,\ G_1$ gli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali con basi $(f_i)_{i\leq n},\ (h_i)_{i\leq n},\ (e_i)_{i\leq n}$ rispettivamente. Con una semplice verifica possiamo affermare che le seguenti relazioni definiscono una struttura di algebra di Lie 1-locale su $\widehat{G}(A) := G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_1$:

$$[e_i f_j] = \delta_{ij} h_i, \quad [h_i h_j] = 0, \quad [h_i e_j] = A_{ij} e_j, \quad [h_i f_j] = -A_{ij} f_j.$$

Denotiamo con $G(A) = \bigoplus G_i$ l'algebra di Lie graduata 1-minimale su $\widehat{G}(A)$. Chiamiamo $G(A)$ *algebra di Kac-Moody* con *matrice di Cartan* A.

Assumeremo sempre che la matrice di Cartan A abbia le seguenti ulteriori proprietà:

M1) $A_{ij} = 0$ se e solo se $A_{ji} = 0$,

M2) Per ogni stringa di indici $i_1, \dots, i_k$ vale che

$$A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \cdots A_{i_k i_1} = A_{i_2 i_1} A_{i_3 i_2} \cdots A_{i_1 i_k},$$

M3) $A_{ij} \leq 0,\ A_{ii} \in \{0, 2\}\ \ \forall\ i \neq j$.

Proposizione 5.1.2. *Il centro Z di $G(A)$ consiste in tutti e soli gli elementi in G_0 della forma $\sum a_i h_i$ dove $\sum_i A_{ij} a_i = 0\ \ \forall\ j$. Se la matrice A non contiene righe fatte di soli zeri allora $G'(A) := G(A)/Z$, con gradazione indotta, è transitiva.*

Dimostrazione. Il centro è chiaramente un ideale omogeneo. Per la minimalità di $G(A)$, Z dev'essere contenuto in $\widehat{G}(A)$ altrimenti lo spazio vettoriale generato dai suoi elementi omogenei di grado diverso da $-1, 0, 1$ sarebbe un ideale non banale che interseca banalmente $\widehat{G}(A)$. Inoltre non può avere termini omogenei di grado 1, e analogamente di grado -1, in quanto per ogni $x = \sum c_i e_i \in G_1$ si ha $[(\sum c_i e_i) f_l] = c_l h_l \neq 0 \quad \forall\ l$ tale che $c_l \neq 0$. Quindi $Z \subset G_0$. Scriviamo quindi $z \in Z$ nella forma $\sum_i a_i h_i$ per opportuni coefficienti $a_i \in \mathbb{R}$. La condizione $\sum_i A_{ij} a_i = 0 \quad \forall\ j$ è necessaria e sufficiente affinché $[zx] = 0 \quad \forall\ x \in G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_1$. Tuttavia è anche sufficiente affinché z stia nel centro, basta osservare che $[zx_1] = [zx_2] = 0 \Rightarrow [z[x_1 x_2]] = 0$ quindi $\operatorname{ad} z$ agisce banalmente su tutti gli elementi dell'algebra di Lie $G(A)$. Infine riguardo la transitività, si verifica immediatamente che se non ci sono righe nulle in A, la parte 1-locale di $G'(A)$ è transitiva. Per dire che $G'(A)$ è essa stessa transitiva serve un piccolo raffinamento del punto b) della proposizione (4.3.8): supponiamo per assurdo che esista un $k > 1$ (il caso $k < -1$ è identico) tale che $[xG'_{-1}] = 0$ per un qualche $x \in G'_k$. Ma visto che $G'_{k-1} = G_{k-1}$, concludiamo che anche $[xG_{-1}] = 0$ e quindi contraddiremmo la minimalità di $G(A)$ considerando il solito ideale

$$\sum_{i,j \geq 0} (\operatorname{ad} G_1)^i (\operatorname{ad} G_0)^j G_k.$$

□

Osservazione 5.1.3. *Essendo $G'(A)$ transitiva, per la proposizione* (4.3.8) *è anche minimale sulla sua parte* 1*-locale* $\frac{\widehat{G}(A)}{Z}$.

In quello che seguirà assumeremo sempre che A sia indecomponibile (cioè che la relazione di equivalenza generata da $i \sim j$ se $A_{ij} \neq 0$ ha una sola classe): nel caso in cui A si decomponesse in un tot di blocchi $A_1, \ldots, A_k$ avremmo che $G(A) \simeq G(A_1) \oplus \cdots \oplus G(A_k)$ come algebre di Lie, e potremmo ragionare componente per componente.

Ciò che vogliamo fare adesso è costruire una forma simmetrica invariante su $G(A)$ che ci tornerà estremamente utile per studiare molte proprietà di $G(A)$. Grazie alla proposizione (4.3.2) ci basta definirne una sulla sua parte 1-locale $\widehat{G}(A)$.

Proposizione 5.1.4. *Sia A una matrice di Cartan indecomponibile di dimensione n. Se imponiamo che $(e_i, f_j) = 0$ per $i \neq j$ e che $(e_1, f_1) = 1$, possiamo estendere univocamente a una forma simmetrica invariante su $\widehat{G}(A)$.*

Per il teorema (4.3.2)*, questa si estende univocamente a una forma invariante $(\ ,\ )$ su $G(A)$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che per definizione di forma invariante si deve necessariamente avere che $(e_i, h_j) = (f_i, h_j) = 0 \quad \forall\ i, j \leq n$. Per avere l'invarianza occorrerà anche che

$$(h_i, h_j) = ([e_i f_i], h_j) = (e_i, [f_i h_j]) = A_{ji}(e_i, f_i), \tag{5.1}$$

$$(h_i, h_j) = (h_i, [e_j f_j]) = ([h_i e_j], f_j) = A_{ij}(e_j, f_j). \tag{5.2}$$

Per ogni indice k fissiamo $i_1, i_2, \ldots, i_r$ una sequenza di indici con $i_1 = 1,\ i_r = k$ (esiste per indecomponibilità) tale che $A_{i_s i_{s+1}} \neq 0\ \ \forall s$ (gli indici sono intesi modulo r). Allora le equazioni (5.1) applicate a coppie di indici consecutivi nella sequenza ci dicono che occorre porre necessariamente

$$(e_k, f_k) = \frac{A_{i_2 i_1} A_{i_3 i_2} \cdots A_{i_r i_{r-1}} A_{i_1 i_r}}{A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \cdots A_{i_{r-1} i_r} A_{i_r i_1}},$$

e da questo i prodotti scalari (h_i, h_j) sono determinati tramite l'equazione (5.1). L'equazione (5.2) è soddisfatta dal prodotto scalare così definito: siano infatti $a_1, \ldots, a_l$ e $b_1, \ldots, b_s$ le due sequenze di indici associate a i e a j rispettivamente. Allora

$$(e_i, f_i) = \frac{A_{a_2 a_1} A_{a_3 a_2} \cdots A_{a_l a_{l-1}} A_{a_1 a_l}}{A_{a_1 a_2} A_{a_2 a_3} \cdots A_{a_{l-1} a_l} A_{a_l a_1}}$$
$$(e_j, f_j) = \frac{A_{b_2 b_1} A_{b_3 b_2} \cdots A_{b_r b_{r-1}} A_{b_1 b_r}}{A_{b_1 b_2} A_{b_2 b_3} \cdots A_{b_{r-1} b_r} A_{b_r b_1}}$$

che unite alla proprietà M2) applicata alla sequenza $1 = a_1, a_2, \ldots, a_l, b_s, b_{s-1}, \ldots, b_2$ rendono vera (5.2). Per quanto detto si ha che la simmetria e l'invarianza di $(\ ,\ )$ sono verificate per coppie e per terne di elementi della base rispettivamente, quindi concludiamo per bilinearità. □

Osservazione 5.1.5. *Nel caso in cui A sia una matrice simmetrica si ottiene che*

$$(e_i, f_j) = \delta_{ij}, \qquad (h_i, h_j) = A_{ij} \ \ \forall\ i, j \leq n.$$

Proposizione 5.1.6. *Il prodotto scalare appena definito ha Z come radicale.*

Dimostrazione. Dal momento che $(G_i, G_j) = 0\ \ \forall\ i + j \neq 0$, il radicale $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ è chiaramente un'ideale omogeneo. Sia $\sum a_i h_i \in R_0$, ovvero tale che $(\sum a_i h_i, h_j) = 0\ \ \forall\ j \leq n$. Ricordando che $(h_i, h_j) = A_{ij}(e_j, f_j)$, questo è equivalente a dire che $\sum_i a_i A_{ij}(e_j, f_j) = 0\ \ \forall\ j \Leftrightarrow \sum a_i A_{ij} = 0\ \ \forall\ j \Leftrightarrow\ \sum a_i h_i \in Z$.

D'altronde anche R_1 (e analogamente R_{-1}) deve essere banale, in quanto preso un qualsiasi x della forma $\sum a_i e_i$, con un certo $a_j \neq 0$ si ha $(\sum a_i e_i, f_j) = a_j(e_j, f_j) \neq 0$.

Adesso abbiamo concluso, in quanto R/Z è il radicale della forma indotta su $G'(A)$, che per quanto dimostrato è un'ideale omogeneo che interseca banalmente la parte 1-locale. Per minimalità di $G'(A)$, R/Z dev'essere banale. □

Osservazione 5.1.7. *Sia $\widetilde{G}$ l'algebra di Lie graduata massimale su $\widehat{G}(A)$, quindi con $\widetilde{G}/I = G(A)$ dove I è ideale massimo a intersezione banale con $\widehat{G}(A)$. Allora la precedente osservazione dà una caratterizzazione di I come la parte di grado non nullo del radicale di $(\ ,\ )$, vista come forma su $\widetilde{G}$.*

5.2 Sistemi di radici

Data una matrice di Cartan A di dimensione n, siano $\boldsymbol{\varepsilon}_i,\ i \leq n$ delle applicazioni lineari con dominio $G_0(A)$ (i.e. la parte di grado 0 di $G(A)$) definite da

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i(h_j) = A_{ji} \quad \forall\ i,j \leq n$$

(N.B. anche se due di esse sono la stessa applicazione, le considereremo come oggetti distinti).

Sia Γ il reticolo con base formale $(\boldsymbol{\varepsilon}_i)_{i\leq n}$, in cui ciascun elemento $\alpha = \sum \alpha_i \boldsymbol{\varepsilon}_i$ definisce un'applicazione lineare da $G_0(A)$ in $\mathbb{R}$. Analogamente, anche gli elementi di $L := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma$ definiscono delle applicazioni lineari su G_0. Si indichi con Γ_+ (risp. Γ_-) le combinazioni intere degli $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ a coefficienti non negativi, non tutti nulli (risp. non positivi, non tutti nulli). Preso $i \leq n$ definiamo $G_{\boldsymbol{\varepsilon}_i} := \mathbb{R}e_i$, $G_{-\boldsymbol{\varepsilon}_i} := \mathbb{R}f_i$, $G_0 := G_0(A)$ (il primo 0 indica lo zero di Γ, mentre il secondo indica il termine di grado zero di G). Ora per $\alpha \in \Gamma_+$ si ponga

$$G_\alpha := \operatorname{span}([e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}] :\ \sum_l \boldsymbol{\varepsilon}_{i_l} = \alpha),$$

mentre per $\alpha \in \Gamma_-$

$$G_\alpha := \operatorname{span}([f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_k}] :\ -\sum_l \boldsymbol{\varepsilon}_{i_l} = \alpha).$$

Se invece α ha coefficienti di segno discorde si ponga $G_\alpha := 0$.

Denotando con $\widetilde{G}(A)$ l'algebra di Lie graduata massimale su $\widehat{G}(A)$, preso $\alpha \in \Gamma$ definiamo $\widetilde{G}_\alpha$ in modo analogo a G_α (stavolta ci troviamo in uno spazio più grande, dove ancora non abbiamo quozientato per l'ideale massimo con intersezione banale con $\widehat{G}(A)$).

Preso $\alpha \in \Gamma$, saremo soliti indicare con e_α un elemento qualsiasi di G_α, o di $\widetilde{G}_\alpha$ a seconda del contesto.

Osservazione 5.2.1. *I sottospazi G_α, al variare di α generano tutta $G(A)$.*

Definizione 5.2.2. Data $\alpha = \sum k_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \in \Gamma$, chiamiamo *altezza* di α l'intero positivo $|\alpha| := |\sum k_i|$.

Dimostrazione. È una diretta conseguenza della proposizione (4.2.17). □

Proposizione 5.2.3. *Sia I l'ideale massimo in $\widetilde{G}(A)$ che interseca banalmente $\widehat{G}(A)$. Allora valgono i seguenti fatti:*

a) Se $\alpha, \beta \in \Gamma$ e $\alpha + \beta \neq 0$, allora $(\widetilde{G}_\alpha, \widetilde{G}_\beta) = 0$.

b) Se $x \in \widetilde{G}_\alpha$ con $\alpha \in \Gamma \setminus \{0\}$ è tale che $(x, \widetilde{G}_{-\alpha}) = 0$, allora $x \in I$.

Dimostrazione. Per il punto a), l'unico caso non banale è $\alpha \in \Gamma_-$ e $\beta \in \Gamma_+$, con almeno uno dei due che non sta nella parte 1-locale. Si fissi una coppia $\alpha \in \Gamma_+,\ \beta \in \Gamma_- \setminus \{-\alpha\}$,

con somma delle altezze di α e β minima, per cui $(\widetilde{G}_\alpha, \widetilde{G}_\beta) \neq 0$ (supponiamo per assurdo che esista). Allora esistono $y = [f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_l}] \in \widetilde{G}_\beta$ e $x = [e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_k}] \in \widetilde{G}_\alpha$ tali che $(x, y) \neq 0$. Il caso $l = k = 1$ lo possiamo escludere, supponiamo quindi $k \geq 2$ (il caso $l \geq 2$ è analogo). Per l'invarianza si ha

$$(x, y) = ([e_{i_1} \cdots e_{i_{k-1}}], [e_{i_k} y]) \overset{(4.2.14)(4.2.12)}{\in} (\widetilde{G}_{\alpha+\boldsymbol{\varepsilon}_{i_k}}, \widetilde{G}_{\beta-\boldsymbol{\varepsilon}_{i_k}}) = 0,$$

dove l'ultimo passaggio segue dalla minimalità di α, β.

Il punto b) è una diretta conseguenza di quanto appena dimostrato, del fatto che i $\widetilde{G}_\alpha$ generino $\widetilde{G}(A)$, e del fatto che il radicale di $(\ ,\ )$ in $\widetilde{G}$ sia $I \oplus Z$ (osservazione (5.1.7)).

□

Osservazione 5.2.4. *Quanto appena mostrato ci dice anche che il punto a) resta valido se mettiamo $G(A)$ al posto di $\widetilde{G}$, mentre il punto b) diventa: "se $x \in G_\alpha$ con $\alpha \in \Gamma \setminus \{0\}$ è tale che $(x, G_{-\alpha}) = 0$ allora $x = 0$."*

Molte proprietà delle algebre di Lie graduate passano alle sottoalgebre omogenee. Come vedremo in seguito, per molte dimostrazioni è più facile lavorare con matrici di Cartan non degeneri. Di conseguenza, considerato che molte caratteristiche delle algebre di Lie graduate passano alle sottoalgebre omogenee, la seguente proposizione ci tornerà spesso comoda.

Proposizione 5.2.5. *Per ogni algebra di Lie contragradiente $G(A)$, associata a una matrice A di dimensione n, esiste un'algebra di Lie contragradiente $G(A')$ con matrice A' non degenere di dimensione n', in cui è naturalmente embeddata, e dove A è minore principale di A'.*

Dimostrazione. Si costruisca A' nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} A & -cI \\ -2I & -2I \end{pmatrix}$$

dove c è un intero che non sia autovalore di A. Si verifica immediatamente che le proprietà M1), M2), M3) continuano ad essere verificate dalla nuova matrice A', l'unica cosa non scontata è che la sottoalgebra di Lie di $G(A')$ generata da $\{f'_1, \ldots, f'_n, h'_1, \ldots, h'_n, e'_1, \ldots, e'_n\}$ sia effettivamente isomorfa a $G(A)$. Prendiamo $\widetilde{G}(A)$ e $\widetilde{G}(A')$ algebre di Lie graduate massimali su $\widehat{G}(A)$ e $\widehat{G}(A')$ rispettivamente, con $G(A) = \widetilde{G}/I$ e $G(A') = \widetilde{G}(A')/I'$. Per la proposizione (4.2.21) l'embedding $\widehat{G}(A) \to \widehat{G}(A')$ induce un embedding $i : \widetilde{G} \to \widetilde{G}'$ (identificheremo $\widetilde{G}$ con l'immagine). Ora, $\widetilde{G}(A) \cap I' \subset I$ perché I è massimo in $G(A)$. Viceversa, preso $x \in I$, con $x \in G_\alpha(A)$ e $\alpha \neq 0$, ho che $(x, \widetilde{G}_\alpha(A)) = 0$. Ma $\widetilde{G}_\alpha(A) = \widetilde{G}_\alpha(A')$, quindi per la proposizione (5.2.3) $x \in I'$. □

Lemma 5.2.6. *Siano $\alpha \in \Gamma$ e $h \in G_0(A)$. Allora $[he_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha$.*

Dimostrazione. Per linearità ci basta verificarlo per elementi del sistema di generatori di G_α dato da $\{[e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}]$ con $\sum_j \boldsymbol{\varepsilon}_{i_j} = \alpha\}$. Ma per questi elementi il lemma è un'immediata conseguenza dell'osservazione (4.2.13). □

Proposizione 5.2.7. *Gli spazi G_α costituiscono una gradazione in $\mathbb{Z}^n$ di $G(A)$, cioè:*

a) $[G_\alpha G_\beta] \subset G_{\alpha+\beta} \quad \forall\ \alpha, \beta \in \Gamma$;

b) $G(A) = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha$.

Dimostrazione. Per il punto a) l'unico caso interessante è $\alpha, \beta \in \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \{0\}$. Se stanno entrambi in Γ_+ o in Γ_- è una diretta conseguenza di (4.2.14). Se $\alpha = 0$, il caso $\beta = 0$ è banale, quindi diciamo $\beta \in \Gamma_+$ (il caso $\beta \in \Gamma_-$ è identico): adesso basta osservare che per ogni $h \in G_0$ tutti gli elementi di G_β sono autovettori di $\operatorname{ad} h$, grazie al lemma (5.2.6). Supponiamo infine che $\alpha \in \Gamma_+$ e $\beta \in \Gamma_-$. Grazie al lemma (4.2.14) ci basta mostrare il seguente fatto:

Lemma 5.2.8. *Siano S_1, S_2 due multi-insiemi non vuoti di indici minori o uguali di n. Denotiamo con e_{S_1} (risp. f_{S_2}) il multi-insieme non vuoto contenente e_i tante volte quante i compare in S_1 (risp. f_i tante volte quante i compare in S_2). Siano inoltre $\alpha = \sum_{i\in S_1} \boldsymbol{\varepsilon}_i$ e $\beta = \sum_{i\in S_2} \boldsymbol{\varepsilon}_i$. Allora*

$$[x_1x_2\cdots x_k] \in G_{\alpha+\beta},$$

ogni volta che il multi-insieme contenente gli x_i (contati con molteplicità) è uguale a $e_{S_1} \cup f_{S_2}$.

Dimostrazione. Supponiamo l'assurdo. Sia S_1, S_2 una coppia di multi-insiemi - di cui almeno uno non vuoto - con somma delle cardinalità minima, che non soddisfa la proprietà del testo per certi $[x_1x_2\cdots x_k] \neq 0$. Diciamo $x_1 \in e_{S_1}$ (l'altro caso è identico). Se S_2 è vuoto abbiamo già concluso, altrimenti sia $m \leq k$ il minimo indice i tale che $x_i \in f_{S_2}$, diciamo $x_m = f_l$. Allora per il lemma (5.1) possiamo dire che

$$[x_1x_2\cdots x_m] \in \operatorname{span}([x_1x_2\cdots x_{j-1}[x_jx_m]x_{j+1}\cdots x_{m-1}];\ j = 1, \ldots, m-1),$$

che è nullo a meno che alcuni x_j (con $j \leq m-1$) siano proprio e_l. In tal caso

$$\operatorname{span}([x_1x_2\cdots x_{j-1}[x_jx_m]x_{j+1}\cdots x_{m-1}];\ j = 1, \ldots, m-1) =$$

$$= \operatorname{span}([x_1x_2\cdots x_{j-1}h_lx_{j+1}\cdots x_{m-1}];\ x_j = e_l) \overset{(4.2.12)}{\subset}$$

$$\subset \operatorname{span}([x_1x_2\cdots x_{j-1}x_{j+1}\cdots x_{m-1}];\ x_j = e_l),$$

da cui

$$[x_1x_2\cdots x_k] \in \operatorname{span}([x_1x_2\cdots x_{j-1}x_{j+1}\cdots x_{m-1}x_{m+1}\cdots x_k];\ j < m,\ x_j = e_l).$$

Ma per la minimalità della scelta di S_1 e S_2 possiamo affermare che i generatori dello span di destra soddisfano il lemma, e questo porta a un assurdo. □

Veniamo al punto b). Sappiamo già che i sottospazi G_α generano $G(A)$. Per dire che sono in somma diretta, sfruttando la gradazione di $G(A)$ ci riduciamo fin da subito a dimostrare che i G_α al variare di $\alpha \in \Gamma_+$ sono in somma diretta. Grazie al lemma (5.2.5) possiamo supporre che A sia non degenere, cosicché elementi distinti di Γ definiscano applicazioni lineari distinte. Ora, se per assurdo i G_α (con $\alpha \in \Gamma_+$) non fossero in somma diretta, sia $x = e_\alpha + e_\beta + \cdots = 0$ la più corta relazione di dipendenza non banale tra questi spazi, e $h \in G_0(A)$ tale che $\alpha(h) \neq \beta(h)$. Allora per il lemma (5.2.6) $[hx] - \alpha(h)x = 0$ è una relazione di dipendenza non banale più corta, assurdo. □

Definizione 5.2.9. Dato un $\alpha \in \Gamma \setminus \{0\}$ per cui G_α è non banale (quindi per forza $\alpha \in \Gamma_+ \cup \Gamma_-$) diremo che α è una *radice positiva* (risp. *negativa*) se $\alpha \in \Gamma_+$ (risp. $\alpha \in \Gamma_-$), e chiameremo G_α lo *spazio radice* associato ad α. Denotiamo con Δ_+ (risp. Δ_-) l'insieme delle radici positive (risp. negative), e chiamiamo $\Delta := \Delta_+ \cup \Delta_-$ il *sistema di radici* di $G(A)$. Siano infine $\Pi := \{\boldsymbol{\varepsilon}_i;\ i \text{ tale che } A_{ii} = 2\}$ le *radici semplici* di $G(A)$.

Supponendo A non degenere, preso $x \in L\ (= \mathbb{R} \otimes \Gamma)$, sia h_x l'unico elemento in $G_0(A)$ tale che $(h_x, h) = x(h)\ \ \forall\ h \in G_0$. Basta porre $h_x = \sum_i c_i h_i$ dove i c_i risolvono il sistema lineare $\sum_i c_i A_{ij} = \frac{x(h_j)}{(e_j, f_j)}\ \ \forall\ j \leq n$. Si osservi che l'assegnazione $\alpha \mapsto h_\alpha$ è chiaramente una mappa lineare da L in $G_0(A)$, ed è iniettiva in quanto altrimenti esisterebbero elementi distinti $x, y \in L$ che definiscono le stesse applicazioni lineari. Quindi è un isomorfismo.

Se adesso abbiamo tra le mani una matrice di Cartan degenere A, operiamo l'embedding (5.2.5) $G(A) \to G(A')$. In questo modo possiamo comunque definire la mappa lineare $L \to G_0(A')$, con L associato ad A, per restrizione della mappa $L' \to G_0(A')$, con L' associato ad A'. In realtà faremo vedere a breve che l'immagine della mappa $L \to G_0(A')$ così definita è proprio $G_0(A)$.

Proposizione 5.2.10. *Sia $\alpha \in \Gamma$. Allora*

$$[e_\alpha e_{-\alpha}] = (e_\alpha, e_{-\alpha}) h_\alpha.$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre A non degenere, a meno di embedding. Ma allora ci basta mostrare che, per $\alpha \in \Gamma$,

$$([e_\alpha e_{-\alpha}] - (e_\alpha, e_{-\alpha}) h_\alpha, h_j) = 0\ \ \forall\ j \leq n.$$

D'altronde

$$([e_\alpha e_{-\alpha}], h_j) - (e_\alpha, e_{-\alpha})(h_\alpha, h_j) = (e_\alpha, [e_{-\alpha} h_j]) - (e_\alpha, e_{-\alpha})\alpha(h_j) \overset{(5.2.6)}{=} 0\ \ \forall\ j.$$

□

Osservazione 5.2.11. *Questa osservazione e il fatto che per $\alpha \in \Delta$ si ha $(G_\alpha, G_{-\alpha}) \neq 0$, (perché altrimenti sia G_α che $G_{-\alpha}$ starebbero nel radicale), ci permette di dire che h_α è contenuto nell'algebra di Lie generata da G_α e $G_{-\alpha}$. Nello specifico risolve la questione che avevamo lasciato in sospeso: se A è una matrice degenere e A' è una sua estensione non degenere, la mappa*

$$L \to G_0(A') \tag{5.3}$$

$$x \mapsto h_x \tag{5.4}$$

ha immagine in $G_0(A)$, cioè è un isomorfismo con $G_0(A)$ per una questione di dimensioni.

Andiamo ora a definire il gruppo di Weyl.

Definizione 5.2.12. Preso $i \leq n$ tale che $A_{ii} = 2$, sia $s_i : L \to L$ la trasformazione lineare operante nel seguente modo:

$$s_i(x) = x - \alpha(h_i)\boldsymbol{\varepsilon}_i \ \ \forall\ \alpha \in L.$$

s_i è detta *riflessione semplice* di centro i. Si verifica immediatamente che $s_i^2 = \mathrm{Id}$. Chiamiamo *gruppo di Weyl* il gruppo di automorfismi $W(A)$ generato dalle riflessioni semplici.

Osservazione 5.2.13. *Il prodotto scalare su $G_0(A)$ è invariante per azione di $W(A)$, infatti presi due qualsiasi indici $a, b \leq n$ e scelto i con $A_{ii} = 2$ si ha che*

$$(s_i(h_a), s_i(h_b)) - (h_a, h_b) = (h_a - \boldsymbol{\varepsilon}_i(h_a)h_i\ ,\ h_b - \boldsymbol{\varepsilon}_i(h_b)h_i) - (h_a, h_b) =$$

$$= A_{ai}A_{bi}(h_i, h_i) - A_{bi}(h_a, h_i) - A_{ai}(h_i, h_b) \overset{(5.1)}{=}$$

$$= 2A_{ai}A_{bi}(e_i, f_i) - A_{bi}A_{ai}(e_i, f_i) - A_{ai}A_{bi}(e_i, f_i) = 0.$$

Se A è non degenere e identifichiamo G_0 con il duale di L (dove l'accoppiamento è dato da $\langle x, h\rangle = x(h)$) possiamo considerare anche la rappresentazione duale di $W(A)$ su $L^* = G_0$, data da

$$\langle x, s_i(h)\rangle = \langle x, h \circ s_i^{-1}\rangle = \langle x, h\rangle - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_i, h\rangle\langle x, h_i\rangle \ \ \forall\ h \in G_0,$$

o in altre parole

$$s_i(h) = h - \boldsymbol{\varepsilon}_i(h)h_i \tag{5.5}$$

Quanto appena detto e il lemma (5.2.5) ci permettono di affermare che, anche quando A è degenere, (5.5) ci fornisce un'azione di $W(A)$ su G_0.

Osservazione 5.2.14. *Presi $w \in W(A), x \in L,\ h \in G_0$, si ha che*

$$(wx)(wh) = x(h)$$

Dimostrazione. Segue direttamente dalla definizione dell'azione di W su G_0, come rappresentazione duale. □

Osservazione 5.2.15. *Preso $x \in L$ e s_i riflessione semplice, si ha che*

$$h_{s_i x} = s_i(h_x).$$

Dimostrazione. Basta ragionare nel caso A non degenere. In questo caso è sufficiente mostrare che $(s_i(h_x), h) = (s_i x)(h) \ \ \forall\ h \in G_0,\ x \in L$. Per (5.2.14) questo equivale a $(h_x, s_i h) = (s_i x)(h)$, il che è vero in quanto $(h_x, s_i h) = x(s_i h) = (s_i x)(h)$. □

Proposizione 5.2.16. *In $G(A)$ si ha che, scelti due indici $i \neq j$ con $A_{ii} = 2$,*

$$(\operatorname{ad} e_i)^{-A_{ij}+1} e_j = 0, \qquad (\operatorname{ad} f_i)^{-A_{ij}+1} f_j = 0. \tag{5.6}$$

Dimostrazione. Per (5.1.2) sappiamo che $G'(A)$ è transitiva. Detto $E_{ij} := (\operatorname{ad} e_i)^{-A_{ij}+1} e_j$, ci basta quindi verificare che $[f_s E_{ij}] = 0 \ \ \forall\ s$ (per la seconda uguaglianza si ragiona in modo analogo). Per la proposizione (5.2.7) gli unici casi interessanti sono $s \in \{i, j\}$. Supponendo $s = i$, l'osservazione (4.2.13) ci permette di dire che

$$[f_i E_{ij}] = \sum_{l=0}^{-A_{ij}} (\operatorname{ad} e_i)^{-A_{ij}-l} [h_i((\operatorname{ad} e_i)^l e_j)] \overset{(5.2.6)}{=} \sum_{l=0}^{-A_{ij}} (l\boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_j)(h_i)(\operatorname{ad} e_i)^{-A_{ij}} e_j =$$

$$= -(A_{ij}+1)A_{ij} + 2\sum_{l=0}^{-A_{ij}} l = 0.$$

Se $s = j$ e $A_{ij} < 0$, sempre per (4.2.13) si ha che

$$[f_j E_{ij}] = (\operatorname{ad} e_i)^{-A_{ij}-1} [e_i [e_i h_j]] = 0.$$

Se invece $A_{ij} = 0$, allora $A_{ji} = 0$ quindi $[f_j E_{ij}] = [e_i h_j] = 0$. □

Osservazione 5.2.17. *Quanto appena dimostrato ci dice che per k abbastanza grande $(\operatorname{ad} \pm e_i)^k$ agisce banalmente su G_1. D'altronde si osserva subito che se $k \geq 3$, allora $(\operatorname{ad} \pm e_i)^k$ agisce banalmente anche su G_0 e su G_{-1}. Ma esso è l'iterata di una derivazione di algebre di Lie, quindi agirà banalmente su tutta $G(A)$ (in quanto generata dalla parte locale). Un discorso analogo vale con $\operatorname{ad} \pm f_i$ al posto di $\operatorname{ad} \pm e_i$.*

Grazie a questa osservazione, se $A_{ii} = 2$ ha senso definire gli esponenziali

$$\exp(\operatorname{ad} \pm e_i) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{ad} \pm e_i)^n}{n!},$$

che saranno uno inverso dell'altro (facendo un prodotto di esponenziali di applicazioni che commutano, il risultato è l'esponenziale della somma degli argomenti). Gli esponenziali $\exp(\operatorname{ad} \pm f_i)$ si definiscono in modo analogo.

Preso i tale che $A_{ii} = 2$ andiamo quindi a considerare la seguente applicazione, che è anche un automorfismo di $G(A)$ come algebra di Lie:

$$\sigma_i = \exp(\operatorname{ad} f_i) \exp(\operatorname{ad} -e_i) \exp(\operatorname{ad} f_i)$$

Lemma 5.2.18. *Preso i con $A_{ii} = 2$ valgono le seguenti relazioni:*

$$\sigma_i(h) = s_i(h) \quad \forall\ h \in G_0, \qquad\qquad \sigma_i(G_\alpha) = G_{s_i(\alpha)} \quad \forall \alpha \in \Delta.$$

Da ciò segue nello specifico che Δ è invariante per azione di $W(A)$.

Dimostrazione. La prima relazione si verifica con un semplice calcolo: possiamo limitarci a considerare l'espansione "al prim'ordine" del termine $\exp(\operatorname{ad} f_i)$ a destra, "al secondo ordine" di $\exp(\operatorname{ad} -e_i)$ e di $\exp(\operatorname{ad} f_i)$ a sinistra. Per mostrare adesso la seconda relazione, possiamo come al solito ridurci al caso A non degenere. Si prenda l'identità di (5.2.6) e si applichi σ_i da entrambe le parti, ottenendo

$$[\sigma_i(h)\sigma_i(e_\alpha)] = \alpha(h)\sigma_i(e_\alpha) \quad \forall\ h \in G_0 \Rightarrow \tag{5.7}$$

$$\Rightarrow [h\sigma_i(e_\alpha)] = \alpha(s_i h)\sigma_i(e_\alpha) \overset{(5.2.14)}{=} (s_i\alpha)(h)\sigma_i(e_\alpha) \quad \forall\ h \in G_0. \tag{5.8}$$

Se adesso scriviamo $\sigma_i(\alpha) = \sum_{\beta\in\Gamma} e_\beta$ (dove gli e_β sono tutti nulli a meno di un numero finito), si ha

$$\sum_{\beta\in\Gamma} (s_i\alpha)(h)e_\beta = [h\sigma_i(e_\alpha)] \overset{(5.2.6)}{=} \sum_{\beta\in\Gamma} \beta(h)e_\beta \quad \forall\ h \in G_0.$$

Questo significa che per ogni β con $e_\beta \neq 0$ si deve avere $(s_i\alpha)(h) = \beta(h) \quad \forall\ h \in G_0$, cioè necessariamente $\beta = s_i\alpha$ poiché A è non degenere.

L'invarianza di Δ tramite $W(A)$ segue immediatamente da $\sigma_i(G_\alpha) = G_{s_i(\alpha)} \quad \forall\ i : A_{ii} \neq 0$. □

Osservazione 5.2.19. *Δ è anche invariante per la mappa $\alpha \mapsto -\alpha$. Infatti l'automorfismo di $G(A)$ che si ottiene estendendo quello della parte 1-locale dato da $e_i \mapsto f_i,\ f_i \mapsto e_i,\ h_i \mapsto -h_i \quad \forall\ i \leq n$ (un tale automorfismo esiste per la proposizione (4.3.8)) manda G_α in $G_{-\alpha}$ per ogni $\alpha \in \Delta$.*

5.3 Camera fondamentale

Continuiamo sulla strada per caratterizzare ulteriormente Δ.

Proposizione 5.3.1. *Sia $\alpha \in \Delta$ e ε_i una radice semplice. Allora esistono p, q interi non negativi tali che $\alpha + k\varepsilon_i \in \Delta$ se e solo $-p \leq k \leq q$. Inoltre $p - q = \alpha(h_i)$.*

Dimostrazione. A meno di applicare l'automorfismo (5.2.19) possiamo supporre che $\alpha \in \Delta_+$. Sia p massimo per cui $\alpha - p\varepsilon_i \in \Delta$ (esiste!). Allora detto S l'insieme di tutte le radici

della forma $\alpha + k\boldsymbol{\varepsilon}_i$, lo possiamo dividere in "blocchi" di radici consecutive, cioè esistono $-p = p_1 \leq q_1 < p_2 \leq q_2 < \cdots < p_j \leq q_j$, con $q_l + 1 \neq p_{l+1} \ \ \forall\, l \leq j$, tali che

$$S = \bigsqcup_{l=1}^{j} S_l, \quad \text{dove} \quad S_l := \{\alpha + p_l\boldsymbol{\varepsilon}_i, \alpha + (p_l+1)\boldsymbol{\varepsilon}_i, \ldots, \alpha + q_l\boldsymbol{\varepsilon}_i\}.$$

Notiamo che $s_i(\alpha + k\boldsymbol{\varepsilon}_i) = s_i(\alpha) - k\boldsymbol{\varepsilon}_i \ \ \forall\, k \in \mathbb{Z}$, quindi s_i manda blocchi in blocchi e ne inverte l'ordine (cioè $s_i(S_1) = S_l, s_i(S_2) = S_{j-1}, \ldots$). Al tempo stesso però ogni spazio della forma

$$\bigoplus_{k=p_l}^{q_l} G_{\alpha+k\boldsymbol{\varepsilon}_i}$$

con $l \leq j$, è invariante tramite l'azione di $\operatorname{ad} e_i$ e $\operatorname{ad} f_i$ (ricordiamo infatti che $G_{\alpha+(q_l+1)\boldsymbol{\varepsilon}_i} = 0$ e $G_{\alpha+(p_l-1)\boldsymbol{\varepsilon}_i} = 0$ per costruzione), quindi per il lemma (5.2.18) anche gli insiemi S_l devono essere invarianti. Da queste osservazioni segue che S è in realtà costituito dal singolo blocco $\{\alpha - p\boldsymbol{\varepsilon}_i, \alpha - (p-1)\boldsymbol{\varepsilon}_i, \ldots, \alpha + q\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$. Inoltre, affinché esso sia invariante per azione di s_i (che scambia l'ordine della sequenza) deve valere che $s_i(\alpha - p\boldsymbol{\varepsilon}_i) = \alpha + q\boldsymbol{\varepsilon}_i \Rightarrow \alpha(h_i)\boldsymbol{\varepsilon}_i = (p-q)\boldsymbol{\varepsilon}_i$, e questo conclude quanto volevamo dimostrare. □

Dato un vettore u in $\mathbb{R}^n$, diciamo che $u \geq 0$) se $u_i \geq 0 \ \ \forall\, i \leq n$. Se vale che $u_i > 0 \ \ \forall\, i \leq n$ (risp. $u_i < 0$) diciamo che u è *strettamente positivo* (risp. *strettamente negativo*).

Da ora in poi supporremo che $A_{ii} = 2 \ \ \forall\, i \leq n$, quindi che $\Pi = \{\boldsymbol{\varepsilon}_i;\ i \leq n\}$, che è il caso che ci interessa per i nostri scopi.

Lemma 5.3.2. *Sia A una matrice di Cartan indecomponibile di dimensione n e $u \in \mathbb{R}^n$. Allora vale una e una sola delle seguenti:*

P) A non degenere; se $Au \geq 0$ allora $u = 0$ o u strettamente positivo;

Z) A ha rango $n-1$. Esiste u strettamente positivo tale che $Au = 0$; se $Au \geq 0$ allora $Au = 0$;

N) Esiste u strettamente positivo con Au strettamente negativo; se $u \geq 0$ e $Au \geq 0$ allora $u = 0$.

A seconda dei casi diremo rispettivamente che A è di tipo positivo, di tipo zero o di tipo negativo.

Dimostrazione. La dimostrazione non è complessa, ma la omettiamo per non essere troppo dispersivi, rimandando a [Vin71] (Teorema 3 e Lemma 13) per una trattazione completa. Peraltro è possibile dare una semplice caratterizzazione per le matrici di tipo positivo e di tipo zero (nel caso simmetrico saltano fuori proprio i grafi di Dynkin e i grafi Euclidei). □

Introduciamo la seguente notazione:

$\Delta^{re} = W(A) \cdot \Pi$ è detto insieme delle *radici reali* di $G(A)$, mentre $\Delta^{re}_+ = \Delta^{re} \cap \Gamma_+$ sono le radici reali positive.

$\Delta^{im} = \Delta \setminus \Delta^{re}$ è detto insieme delle *radici immaginarie*, mentre $\Delta^{im}_+ = \Delta_+ \setminus \Delta^{re}_+$ sono le radici immaginarie positive.

Si osservi che essendo Δ e Δ^{re} invarianti tramite $W(A)$ e tramite $\alpha \mapsto -\alpha$, anche Δ^{im} dovrà necessariamente esserlo.

Proposizione 5.3.3. *Se $\alpha \in \Delta^{re}$ allora $\mathbb{Q}\alpha \cap \alpha = \{\pm\alpha\}$.*

Dimostrazione. Sia w tale che $w(\alpha) = \boldsymbol{\varepsilon}_i$. Segue direttamente dalla definizione degli spazi radice che $\mathbb{Q}\boldsymbol{\varepsilon}_i$ contiene come uniche radici $\pm\boldsymbol{\varepsilon}_i$. Si conclude per linearità di w. □

Proposizione 5.3.4. *$\Delta_+ \setminus \{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$ è invariante per s_i riflessione semplice. Di conseguenza Δ^{im}_+ è invariante per l'azione di $W(A)$.*

Dimostrazione. Quando applico la riflessione semplice s_i a Δ_+, devo ottenere altre radici, quindi elementi in Γ_+ o in Γ_-. Una radice positiva $\alpha \in \Delta_+ \setminus \mathbb{Q}\boldsymbol{\varepsilon}_i$ della forma $\sum_j k_j \boldsymbol{\varepsilon}_j$ ha almeno un $k_j > 0$ con $j \neq i$, di conseguenza $s_i(\alpha) = (k_i - \alpha(h_i)\boldsymbol{\varepsilon}_i) + \sum_{j\neq i} k_j \boldsymbol{\varepsilon}_j$ non può stare in Δ_-, quindi continua a stare in $\Delta_+ \setminus \mathbb{Q}\boldsymbol{\varepsilon}_i$.

Quanto appena mostrato, unito al fatto che Δ^{im} è invariante tramite $W(A)$, permette di dire che $W(A) \cdot \Delta^{im}_+ = \Delta^{im}_+$. □

Proposizione 5.3.5. *Sia α una qualsiasi radice positiva non in Π. Allora esiste $\beta \in \Pi$ tale che $\alpha - \beta \in \Delta_+$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che α radice positiva significa G_α non banale; segue perciò dalla definizione di G_α che esiste un elemento $[e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}] \neq 0$, con $\sum_{l\leq k} \boldsymbol{\varepsilon}_{i_l} = \alpha$ (quindi $k = |\alpha| > 1$). Ma allora $[e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{k-1}}] \neq 0$, da cui $\alpha - \boldsymbol{\varepsilon}_{i_k} \in \Delta_+$. □

Proposizione 5.3.6. *Se A è di tipo zero o negativo allora per qualsiasi $\alpha \in \Delta_+$ esiste $\beta \in \Pi$ tale che $\alpha + \beta \in \Delta_+$.*

Dimostrazione. Denotiamo con p_i e q_i gli interi non negativi per cui $\alpha + k\boldsymbol{\varepsilon}_i \in \Delta_+ \Leftrightarrow -p_i < k < q_i$, che per la proposizione (5.3.1) sappiamo essere tali che $p_i - q_i = \alpha(h_i)$. Supponiamo per assurdo che $q_i = 0 \ \ \forall\, i \leq n$. Ma allora $\alpha(h_i) \geq 0 \ \ \forall\, i$, in altre parole $A\alpha \geq 0$. Se A è di tipo negativo questo già porterebbe a un assurdo in quanto significherebbe che $\alpha = 0$. Se A è di tipo zero otteniamo che $\alpha(h_i) = 0 \ \ \forall\, i \leq n$. Ma per la proposizione precedente esiste j tale che $\alpha - \boldsymbol{\varepsilon}_j \in \Delta_+$, cioè tale che $p_j \geq 1$. Di conseguenza $q_j \geq 1$, e questo conclude. □

Definizione 5.3.7. Il *diagramma di Dynkin-Coxeter* associato ad A è il grafo senza loop $S(A)$ con n vertici (numerati da 1 a n) dove ogni coppia di vertici distinti i, j è collegata da un numero di archi pari a $\min(A_{ij}, A_{ji})$. Per poter risalire ad A da $S(A)$, se $A_{ij} \neq A_{ji}$ etichettiamo gli archi tra i e j con la coppia (A_{ij}, A_{ji}).

Il supporto di $\alpha \in \Gamma$ si definisce associando al vertice $i \in S(A)$ il valore α_i, e considerando il sottografo completo con vertici di valore non nullo.

Osservazione 5.3.8. *Sia $\alpha \in \Delta$. Allora il supporto di α in $S(A)$ è connesso.*

Dimostrazione. Sia A' il minore di A dove consideriamo solo le posizioni (i,j) con $\alpha_i, \alpha_j \neq 0$. Supponiamo per assurdo che $\operatorname{supp}\alpha$ non sia connesso, cioè che A' sia decomponibile. Allora posso decomporre $G(A')$ in $G(B) \oplus G(C)$ con B e C minori complementari in A'. Segue che

$$G(A') = \bigoplus_{\beta \in \Delta_B} G_\beta(B) \oplus \bigoplus_{\gamma \in \Delta_C} G_\gamma(C) = \bigoplus_{\beta \in \Delta_B \cup \Delta_C} G_\beta(A'),$$

il che porta a dire che nella decomposizione di $G(A')$ in spazi radice non compare il termine $G_\alpha(A')$, che quindi deve essere per forza nullo. Segue che dev'essere nullo $G_\alpha(A)$, per (4.2.21). □

Definizione 5.3.9. Chiamiamo *camera fondamentale* l'insieme M costituito da elementi $\alpha \in \Gamma_+$ con supporto connesso in $S(A)$ e con $\alpha(h_i) \leq 0 \ \ \forall\, i \leq n$.

Proposizione 5.3.10. *Se $\alpha \in \Delta_+^{im}$ allora $W(A)\cdot\alpha$ contiene un elemento di M.*

Dimostrazione. Sappiamo già che $W(A)\cdot\alpha \subset \Delta_+^{im}$. Sia $\beta \in W(A)\cdot\alpha$ di altezza minima (ricordiamo che l'altezza di β positivo della forma $\sum k_j \boldsymbol{\varepsilon}_j$ è $|\beta| = \sum_j k_j$). Deduciamo che $\beta(h_i) \leq 0 \ \ \forall\, i \leq n$, altrimenti applicando una riflessione semplice abbasseremmo l'altezza. Inoltre il supporto di β in $S(A)$ è chiaramente connesso per l'osservazione (5.3.8). □

Osservazione 5.3.11. *Se A è di tipo positivo la camera fondamentale è necessariamente vuota. Segue che non esistono radici immaginarie positive, e quindi neanche negative.*

Proposizione 5.3.12. *Sia A una matrice di Cartan di tipo zero o negativo. Allora la camera fondamentale M è interamente contenuta in Δ_+^{im}.*

Dimostrazione. Fissiamo $\alpha = \sum k_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \in M$, e dimostriamo innanzitutto che $\alpha \in \Delta_+$. Sia $\mathcal{R} = \{\gamma \in \Delta_+;\ \alpha - \gamma \geq 0\}$ (non vuoto in quanto contiene almeno una radice semplice). Chiamiamo $\beta = \sum m_i \boldsymbol{\varepsilon}_i$ un elemento di altezza massima in $\mathcal{R}$. Se per assurdo $\alpha \notin \Delta_+$ si ha $\alpha - \beta \in \Gamma_+$. Per la proposizione (5.3.6) l'insieme di vertici

$$P = \{i :\ k_i = m_i\}$$

è non vuoto. Inoltre, $\beta + \boldsymbol{\varepsilon}_i \notin \Delta_+$ se $k_i > m_i$ (altrimenti β non avrebbe altezza massima), che implica $\beta(h_i) \geq 0$ se $k_i > m_i$. Fissiamo una componente connessa Q del grafo ottenuto da $S(A)$ eliminando tutti i vertici in P e gli archi che li coinvolgono. Si ponga

$$\beta = \sum_{i \in Q} m_i \boldsymbol{\varepsilon}_i; \qquad \beta'' = \beta - \beta'.$$

Avendo β'' supporto fuori da Q possiamo dire che $\beta''(h_i) \leq 0 \ \ \forall\, i \in Q$. Questo, unito al fatto che $\beta(h_i) \geq 0 \ \ \forall\, i \in Q$ ci porta a dire che $\beta'(h_i) \geq 0 \ \ \forall\, i \in Q$, ci fa escludere quindi

che Q sia di tipo negativo. Se Q fosse di tipo zero allora $\beta'(h_i) = 0 \ \ \forall\, i \in Q$ comporta che $\beta''(h_i) = 0 \ \ \forall\, i \in Q$. Questo è assurdo in quanto, scelto un vertice j di Q che sia collegato a un vertice in P tramite un arco (un tale j esiste!) si deve per forza avere $\beta''(h_j) < 0$.

Abbiamo appena mostrato che Q dev'essere di tipo positivo. Sia ora

$$\alpha' = \sum_{i \in Q} (k_i - m_i)\boldsymbol{\varepsilon}_i.$$

Essendo Q una componente connessa del grafo $S(A)\setminus P$, avremo $\alpha'(h_i) = (\alpha - \beta)(h_i) \ \ \forall\, i \in Q$. Ma sappiamo che $\alpha(h_i) \leq 0, \ \ \beta'(h_i) \geq 0 \ \ \forall\, i \in Q$ (qui è entrata in gioco l'ipotesi che α sta in M), da cui segue $\alpha'(h_i) \leq 0 \ \ \forall\, i \in Q$, il che contraddice la positività di Q.

Abbiamo così dimostrato che gli elementi di M sono radici positive. Tuttavia per definizione di camera fondamentale $\alpha \in M \Rightarrow 2\alpha \in M$, quindi per la proposizione (5.3.3) M è composto unicamente da radici immaginarie. □

Osservazione 5.3.13. *La proposizione* (5.3.12)*, unita a* (5.3.10)*, ci permette di definire in modo alternativo il sistema di radici immaginarie positive di* $G(A)$*:*

$$\Delta_+^{im} = W(A) \cdot M$$

(per matrici di tipo positivo gli insiemi di entrambi i lati sono vuoti).

5.4 Considerazioni finali

Dato un grafo S con n vertici e senza loop, possiamo vederlo come diagramma di Dynkin-Coxeter di una certa matrice simmetrica A, con $A_{ii} = 2 \ \ \forall\, i \leq n$ e

$$A_{ij} = -\#\{h \in \Omega \ \text{ con coppia di estremi } (i,j)\} \ \ \forall\, i \neq j.$$

In questo modo possiamo identificare le due definizioni di Γ che abbiamo dato, una relativa ai quiver e l'altra relativa alle algebre di Kac-Moody. In entrambi i casi la riflessione semplice s_i era tale che

$$s_i(\boldsymbol{\varepsilon}_j) = \boldsymbol{\varepsilon}_j - A_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}_i,$$

quindi anche le due definizioni di gruppo di Weyl che abbiamo dato sono coerenti tra loro. Tutto questo seguiva direttamente dalle definizioni, per niente scontato era invece che la definizione di radice immaginaria positiva per il quiver S coincidesse con quella data per l'algebra di Kac-Moody $G(A)$. La trattazione fatta nel capitolo 5, e in particolare le proposizioni (5.3.10) e (5.3.12) ci hanno però permesso di mostrare la coerenza delle due definizioni.

Possiamo riassumere quanto detto nel seguente teorema:

Teorema 5.4.1. *Sia (S, O) un quiver senza loop, e A la matrice di Cartan simmetrica con $S(A) = S$, e $\alpha \in \Gamma_+$. Sia inoltre $\mathbb{F}$ un campo algebricamente chiuso. Allora valgono le seguenti:*

a) $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$ contiene rappresentazioni indecomponibili se e solo se G_α è uno spazio radice, cioè $G_\alpha(A) \neq 0$.

b) Se $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$ contiene una e una sola classe di isomorfismo di indecomponibili, allora $G_\alpha(A)$ è uno spazio radice reale[1], quindi $\dim_{\mathbb{R}} G_\alpha(A) = 1$.

c) Se $\mathfrak{m}^\alpha(S, O, \mathbb{F})$ contiene infinite rappresentazioni indecomponibili non isomorfe allora $G_\alpha(A)$ è uno spazio radice immaginario.

Questo excursus sulle algebre di Kac-Moody ci ha inoltre permesso di scoprire delle interessanti caratteristiche del sistema di radici positive di S: si pensi ad esempio a (5.3.1), (5.3.5) e (5.3.6).

[1] Nel caso $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$, per dir questo stiamo assumendo esistano infinite rappresentazioni indecomponibili non isomorfe di dimensione $\alpha \in \Delta_+^{im}$, cosa che in questa tesi non abbiamo dimostrato.

Bibliografia

[Boe93] W. Crawley Boevey. *Geometry of Representation of Algebras*. 1993.

[Bor91] A. Borel. *Linear algebraic groups*. 2ª ed. Graduate Texts in Mathematics. 1991.

[Jac79] N. Jacobson. *Lie algebras*. 2ª ed. Dover books on advanced mathematics. 1979.

[Kac68] V. Kac. *Simple Irreducible Graded Lie Algebras of Finite Growth*. Mathematics of the USSR-Izvestiya. 1968.

[Kac80] V. Kac. *Infinite Root Systems, Representations of Graphs and Invariant Theory*. Inventiones mathematicae. 1980.

[Kac83] V. Kac. *Invariant theory*. Lecture Notes in Mathematics. 1983.

[Kir16] Jr. A. Kirillov. *Quiver Representations and Quiver Varieties*. Graduate Studies in Mathematics. 2016.

[Naz73] L. A. Nazarova. *Representations of quiver of infinite type*. Mathematics of the USSR-Izvestiya. 1973.

[Sta22] The Stacks project authors. *The Stacks project*. `https://stacks.math.columbia.edu/tag/054K`. 2022.

[Vin71] E. B. Vinberg. *Discrete linear groups generated by reflections*. Mathematics of the USSR-Izvestiya. 1971.